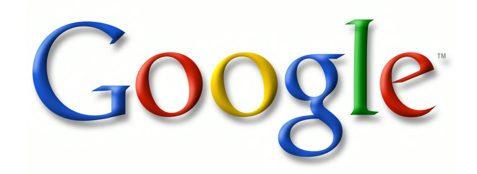





600047119S






600047119S


G. 1. 1. 15



JACOB STEINER'S

VORLESUNGEN

ÜBER

SYNTHETISCHE GEOMETRIE.

ERSTER THEIL:

DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE

IN

ELEMENTARER DARSTELLUNG.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1867.

DIE

THEORIE DER KEGELSCHNITTE

IN

ELEMENTARER DARSTELLUNG.

AUF GRUND VON UNIVERSITÄTSVORTRÄGEN UND MIT BENUTZUNG HINTERLASSENER MANUSCRIPTE JACOB STEINER'S

BEARBEITET

VON

DR. C. F. GEISER,
DOZENT AM SCHWEIZERISCHEN POLYTECHNICUM.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1867.

VORWORT.

Es ist in den letzten Lebensjahren Jacob Steiner's einer seiner Lieblingswünsche gewesen, die beiden Hauptvorlesungen, welche er regelmässig an der Berliner Universität hielt, herauszugeben. Leider war aber die Gesundheit des grossen Geometers in diesen Zeiten derart erschüttert, dass er selbst nicht daran denken konnte, die mit grosser Mühe verbundene Arbeit auf sich zu nehmen, und so blieb es dem Verfasser dieses Buches vorbehalten, bei Uebernahme der hinterlassenen Schriften Steiner's, die Herausgabe der Vorlesungen in erster Linie zu besorgen.

Es bot sich von selbst dar, dass der Anfang mit der Vorlesung: „Eigenschaften der Kegelschnitte und einiger andern Curven, synthetisch und elementar entwickelt“ gemacht wurde, denn für diese ergaben sich in einem etwa 80 Seiten haltenden Manuscripte, betitelt: „Populäre Kegelschnitte“ hinreichende Anhaltspunkte. Zudem stellte Herr Professor Dr. Sidler in Bern mit der verdankenswerthesten Bereitwilligkeit dem Verfasser ein ausgezeichnet geführtes Collegienheft der Vorlesung zur Verfügung, so dass es nicht schwer hielt, den Steiner'schen Vortrag bis ins Einzelne zu verfolgen.

Immerhin schliesst sich nur der zweite [der umfassendste] Abschnitt des vorliegenden Buches, welcher Ellipse, Hyperbel und Parabel gesondert untersucht, in Inhalt und Anordnung dem Steiner'schen Manuscripte an, während der erste und der dritte Abschnitt, die Hauptsätze der Kreistheorie, die Lehre vom geometrischen Orte und eine gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte enthaltend, nach einigen von Steiner in seinen Manuscripten angedeuteten, aber nicht ausgeführten Ideen bearbeitet wurden. Auch in diesen Abschnitten sind die meisten Resultate aus der erwähnten Quelle geschöpft, nur glaubt der Herausgeber ausdrücklich für die Anordnung derselben, sowie für allfällige Unrichtigkeiten hier die Verantwortlichkeit übernehmen zu müssen. — Da in dem ganzen Buche nur elementare Sätze behandelt werden, so war die Einführung historischer Notizen sowie aller Quellennachweis unnöthig.

Alle auf Curven höherer Grade bezüglichen Sätze des Steiner'schen Manuscriptes sind in diese Bearbeitung nicht aufgenommen worden, weil sie sich meistentheils auf Untersuchung projectivischer Gebilde stützen. Ein Abschnitt, der in der ersten Ausarbeitung über die elementaren projectivischen Beziehungen dem Buche angefügt war, ist nach genauer Ueberlegung in der Schlussredaction gestrichen worden.

Man wird ohne Zweifel an mancher Stelle des Buches fühlen, dass dasselbe nicht in einem Gusse entstanden ist; es möge zur Entschuldigung angeführt sein, dass dem Verfasser namentlich in den zwei letzten Jahren durch selbstständige wissenschaftliche Arbeiten und durch eine oft drückende Lehrthätigkeit die beste Arbeitszeit entzogen wurde, so dass er nur ab und zu sich der Ueberarbeitung und Ausführung seines ersten Entwurfes widmen konnte. Vielleicht erkennt eine wohlwollende Kritik auch an, dass die ungleiche Behandlung einzelner Partieen ihren Grund darin hat, dass der Verfasser diejenigen Sätze, welche von grösserer Bedeutung sind und mehrfach zur Anwendung kommen, möglichst ausführlich erörterte, während die aus ihnen gezogenen Folgerungen so kurz als irgend thunlich angedeutet sind. Im Uebrigen sei das Buch dem mathematischen Publikum zur geneigten Beurtheilung empfohlen.

Der Bearbeiter dieser Vorlesung Steiner's hatte die Absicht, auch die Vorlesung: „Ueber die neuern Methoden der synthetischen Geometrie“ herauszugeben, als sich glücklicherweise Herr Professor Dr. Schröter zur Redaction derselben bereit erklärte, so dass nun die beiden Vorlesungen gleichzeitig erscheinen können; die Beziehungen zwischen denselben sind leicht aufzufinden und brauchen hier nicht näher erörtert zu werden.

Zum Schlusse sei dem Herrn Maschineningenieur F. Haller in Olten der freundschaftlichste Dank ausgesprochen für die ausgezeichnete Sorgfalt, mit welcher er die Originale zu den in den Text gedruckten Holzschnitten ausführte und für die vielfache Mühe, welche er auf die Correctur des ganzen Buches verwendet hat.

C. F. G.

INHALTSVERZEICHNISS.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Der Kreis.

Zweites Kapitel.

Der geometrische Ort.

Die Kegelschnitte in spezieller Behandlungsweise.

Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

Viertes Kapitel.

Die Hyperbel.

Fünftes Kapitel.

Die Parabel.

Gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte.

Sechstes Kapitel.

Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte.

Siebentes Kapitel.

Der Kegelschnitt als Projection des Kreises.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

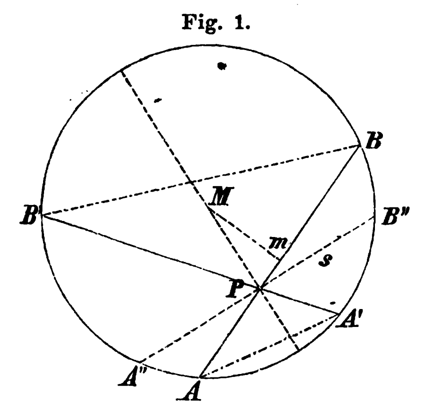
Der Kreis.

§ 1. Die Potenz.

Zieht man durch einen Punkt P innerhalb des Kreises M zwei beliebige Sehnen AB und $A'B'$, so ist $PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB'$.

Die Dreiecke PAA' und PBB' sind ähnlich, denn es ist

Fig. 1.



$\sphericalangle\ APA' = BPB'$ und $\sphericalangle\ PAA' = PB'B$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen $A'B$. Man hat also

$$PA' : PB = PA : PB'$$

und schliesslich $$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB'.$$

Legt man durch P eine Sehne senkrecht zu dem Durchmesser PM, so wird dieselbe in P halbirt, so dass man hat

$$PA'' = PB'' = s, \text{ also:}$$

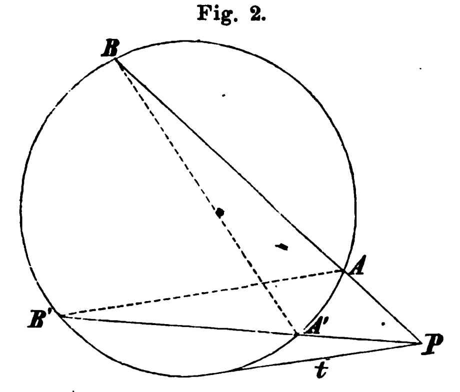
$$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB' = PA'' \,.\, PB'' = s^2$$

Wir nennen s die halbe kleinste Sehne durch P, denn jede durch P gelegte Sehne ist grösser als $A''B''$. Man findet z. B. für AB die Entfernung Mm vom Mittelpunkte M kleiner als die Entfernung der Sehne $A''B''$ von demselben Punkte, denn in dem rechtwinkligen Dreieck MmP ist die Kathete Mm kleiner als die Hypotenuse MP. Je weiter aber eine Sehne vom Kreismittelpunkte entfernt ist, desto kleiner ist sie, also ist $A''B''$ die kleinste der durch P gezogenen Sehnen.

Liegt der Punkt P ausserhalb des Kreises, so hat man immer noch für zwei beliebige Sekanten PAB und $PA'B'$ die Gleichung $PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB'$.

Man ziehe AB' und $A'B$, dann ist $\triangle\ APB' \sim A'PB$, da beide den Winkel bei P gemein haben und ferner ist $\sphericalangle\ A = A'$

Fig. 2.



als Peripheriewinkel über demselben Bogen BB'. Es folgt daraus

$$PA : PB' = PA' : PB$$

oder

$$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB'.$$

Dreht man die Sekante $A'B'$ so, dass sie sich immer mehr der Tangente t nähert, so rücken auch A' und B' zusammen, bis sie, im Grenzfalle, wo die Sekante zur Tangente wird, aufeinanderfallen. Es ist also:

$$PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB' = t^2$$

Sowohl wenn der Punkt P innerhalb des Kreises M, als auch wenn er ausserhalb des Kreises liegt, heisst das Product $PA \,.\, PB$ die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis M. Um aber die beiden genannten Fälle von einander zu unterscheiden, sagt man: Wenn P innerhalb des Kreises M liegt, so

gehen die Strecken PA und PB nach entgegengesetzten Richtungen, man kann also, wenn die eine positiv gezählt wird, die andere negativ nehmen; ihr Product ist ebenfalls negativ, d. h. die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, der ihn umschliesst, ist negativ. Liegt aber P ausserhalb des Kreises, dann gehen die Strecken PA und PB in gleicher Richtung und beide werden entweder positiv oder negativ gezählt; das Product ist dann jedenfalls positiv, d. h. die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, der ihn ausschliesst, ist positiv. Dass für einen Punkt, der auf dem Kreise selbst liegt, die Potenz $= 0$ ist, bedarf keiner weitern Auseinandersetzung. Durch die getroffene Bestimmung der Zeichenverschiedenheit ist man in den Stand gesetzt, die Länge der Tangente zu bestimmen, welche von einem gegebenen Punkte aus an einen vorgelegten Kreis gezogen werden kann, insofern man die Potenz dieses Punktes in Bezug auf den Kreis kennt; es ist nämlich diese Länge gleich der Quadratwurzel aus der Potenz. Die Quadratwurzel kann aber nur dann ausgezogen werden, wenn die Potenz positiv oder Null ist, d. h. man kann an einen Kreis nur von solchen Punkten aus Tangenten ziehen, welche ausserhalb desselben oder auf demselben liegen.

Ein Punkt P ist im Allgemeinen noch nicht bestimmt, wenn man seine Potenz in Bezug auf einen Kreis M kennt; er kann noch auf einem mit diesem conzentrischen Kreise liegen und zwar verhält es sich damit wie folgt:

1) Ist die Potenz negativ und zunächst ihr Werth $= - r^2$, so fällt der Punkt P mit M zusammen. Ist sie $= - s^2$, so liegt P, wie man aus Fig. 1 ableitet, auf einem Kreise, dessen Radius $\varrho = \sqrt{r^2 - s^2}$ ist, so dass also die negative Potenz ihrem absoluten Werthe nach nie grösser als r^2 sein darf.

2) Wenn die Potenz $= 0$ ist, so liegt P auf dem Kreise M selbst und ist

3) die Potenz positiv $= t^2$, so liegt P auf einem Kreise, dessen Radius $\varrho = \sqrt{r^2 + t^2}$ ist. Für die positive Potenz gibt es keine Gränzen, dieselbe kann unendlich werden, was für jeden unendlich entfernten Punkt geschieht.

Die bis jetzt gefundenen Resultate geben eine Auflösung der Aufgabe:

Einen Kreis zu finden, der durch zwei Punkte A und B geht und eine Gerade G berührt.

Zunächst werde der Fall ausgeschlossen, wo G die Verbindungsgerade von A und B ist [der gesuchte Kreis wäre dann die Gerade G selbst, welche offenbar als Kreis von unendlich grossem Radius aufgefasst werden kann]; es sind dann für G drei verschiedene Fälle möglich:

1) G geht durch einen der Punkte A und B, z. B. durch A.

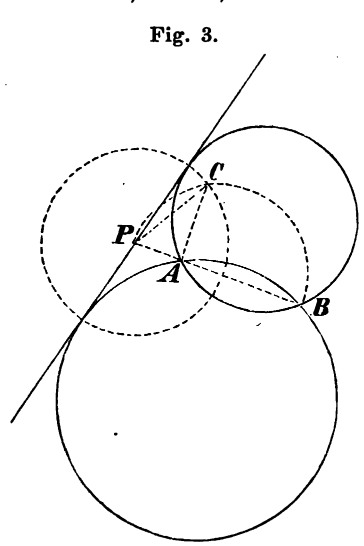
2) A und B liegen auf verschiedenen Seiten von G.

3) A und B liegen auf derselben Seite von G.

1) erledigt sich sehr leicht; man findet den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, indem man von A ein Perpendikel auf G zieht und den Durchschnittspunkt desselben mit demjenigen Perpendikel bestimmt, welches in der Mitte von A und B auf AB errichtet werden kann.

Für 2) und 3) verfährt man wie folgt:

Fig. 3.



G schneide die Gerade AB in einem Punkte P, dann ist die Potenz von P für jeden beliebigen der durch A und B möglichen Kreise $= PA \, . \, PB$ und zwar ist dieselbe negativ oder positiv zu nehmen, je nachdem 2) oder 3) eintritt. Nach den frühern Betrachtungen ist aber die Länge der Tangente, welche von P aus an einen dieser Kreise gelegt werden kann: $t = \sqrt{PA \, . \, PB}$, was nur bei 3) einen wirklichen Werth ergibt, der auch sofort construirt werden kann. Man schlage nämlich, wenn die Punkte in der Reihenfolge PAB liegen, über PB einen Halbkreis, errichte in A auf PB ein Perpendikel, welches denselben in C treffen möge, so ist PC die gesuchte Tangente. Schlägt man nun mit PC als Radius um P einen Kreis, so schneidet dieser auf G zwei Punkte aus, von denen jeder Berührungspunkt eines Kreises ist, welcher den gestellten Bedingungen genügt, und unsere Aufgabe ist darauf zurückgeführt, einen Kreis zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

§. 2. Potenzlinie und Potenzpunkt.

Ein Kreis bestimmt für alle Punkte in der Ebene die in Bezug auf ihn genommene Potenz. Nimmt man nun einen zweiten Kreis hinzu, so kann man fragen, ob es Punkte gebe, welche für die beiden Kreise dieselbe Potenz haben. Zur Beantwortung setzen wir zunächst voraus [was übrigens von keinem Einfluss auf den Beweis ist], dass die beiden Kreise ausser einander liegen.

Sei nun P irgend einer der Punkte gleicher Potenz, so ist für ihn, wenn r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise bedeuten, d der Abstand ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 ist, und wenn ferner die Entfernungen des Punktes P von den Mittelpunkten mit s_1 und s_2 bezeichnet werden, die Potenz nach M_1

$$p_1^2 = s_1^2 - r_1^2$$

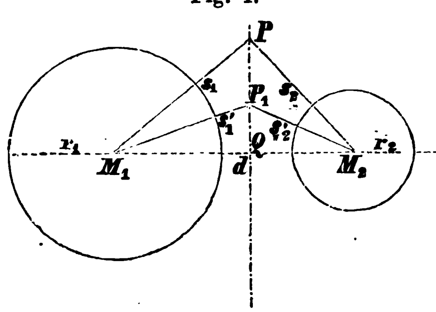
wie der § 1 ergibt, und die Potenz nach M_2

$$p_2^2 = s_2^2 - r_2^2,$$

also da $p_1^2 = p_2^2$ sein soll:

$$s_1^2 - r_1^2 = s_2^2 - r_2^2 \text{ oder } s_1^2 - s_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

Fig. 4.



Umgekehrt, gilt für die Abstände s_1 und s_2 eines Punktes P von den beiden Punkten M_1 und M_2 die Gl.: $s_1^2 - s_2^2 = r_1^2 - r_2^2$, so hat derselbe in Bezug auf die gegebenen Kreise dieselbe Potenz.

Sei Q der Fusspunkt des von P auf $M_1 M_2$ gefällten Perpendikels, so ist

$s_1^2 = PQ^2 + M_1Q^2, s_2^2 = PQ^2 + QM_2^2$, also $s_1^2 - s_2^2 = M_1Q^2 - M_2Q^2$.

Für irgend einen Punkt P' des Perpendikels ist aber, wenn seine Abstände von M_1 und M_2 mit s'_1 und s'_2 bezeichnet werden:

$$s'^2_1 = P'Q^2 + M_1Q^2,\ s'^2_2 = P'Q^2 + QM_2^2,$$

und $$s'^2_1 - s'^2_2 = M_1Q^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

d. h. das von P auf $M_1 M_2$ gefällte Perpendikel ist die Linie gleicher Potenzen.

Es bleibt nur noch übrig, den Punkt Q zu bestimmen, wozu die Gleichungen dienen:

$$M_1 Q + Q M_2 = d \text{ und } M_1 Q^2 - Q M_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

woraus durch Division folgt: $M_1 Q - Q M_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$, so dass man hat: $2\, M_1 Q = d + \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$ und $2\, QM_2 = d - \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$ wodurch Q vollständig gegeben ist.

Wir gehen jetzt noch darauf ein, die Beziehung anzugeben, in welcher die Potenzlinie zweier Kreise, oder die Linien ihrer gleichen Tangenten [was offenbar gleichbedeutend ist] zu der gegenseitigen Lage der beiden Kreise steht. Schneiden sich zwei Kreise, so fällt die Potenzlinie mit ihrer gemeinschaftlichen Sehne zusammen, denn für jeden Schnittpunkt der beiden Kreise ist die Potenz nach dem einen sowohl als nach dem andern derselben gleich Null. Berühren sich die Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente zugleich Potenzlinie. Liegen die Kreise ausser einander, so geht die Potenzlinie zwischen ihnen durch, ohne einen von beiden zu schneiden, und wenn endlich einer von den Kreisen den andern einschliesst, so liegt die Potenzlinie ausserhalb derselben und zwar auf der Centrallinie mit dem Mittelpunkt des eingeschlossenen Kreises auf derselben Seite vom Mittelpunkte des einschliessenden Kreises. Da für conzentrische Kreise $d = 0$ ist, also $M_1 Q$ und QM_2 unendlich werden, so liegt in diesem Falle die Potenzlinie ganz in unendlicher Entfernung.

Drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ bestimmen zu je zweien genommen drei Potenzlinien, welche wir so bezeichnen wollen, dass $M_2 M_3$ und P_1, $M_3 M_1$ und P_2, $M_1 M_2$ und P_3 zusammengehören; die drei Geraden $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich dann in einem Punkte, dem Potenzpunkte der drei Kreise. In der That, sei P der Durchschnitt von P_1 und P_2, so ist für P die Potenz nach M_2 gleich derjenigen nach M_3 und ebenso die Potenz nach M_3 gleich derjenigen nach M_1, also auch die Potenz nach M_1 gleich derjenigen nach M_2, d. h. P liegt wirklich auf der Potenzlinie P_3 der Kreise M_1 und M_2.

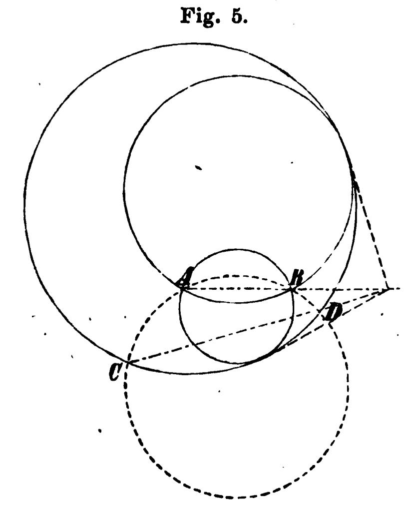
Zieht man von P aus [insofern diess möglich ist] je zwei Tangenten an jeden der Kreise, so sind dieselben alle gleichlang

und ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kreise, der alle drei gegebenen rechtwinklig schneidet, wesshalb er ihr Orthogonalkreis heisst.

Die bewiesene Eigenschaft, dass die drei Potenzlinien dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden, dient dazu, die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise M_1 und M_2 zu finden. Man construire einen Kreis M_3, welcher sowohl M_1 als M_2 schneidet, dann sind die gemeinschaftlichen Sehnen von M_3 und M_1 und von M_3 und M_2 zwei von den drei Potenzlinien der drei Kreise $M_1 M_2 M_3$, die dritte gesuchte geht also durch ihren Schnittpunkt; sie steht zudem senkrecht auf der Centrallinie $M_1 M_2$, wodurch sie vollständig bestimmt ist.

Eine zweite Anwendung des Satzes gibt die Construction des Kreises, welcher durch zwei Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis K berührt. Sei K_2 der gesuchte Kreis, so lege man durch A und B einen beliebigen Kreis K_1, welcher K in zwei Punkten C und D schneidet. Die Kreise $K K_1 K_2$ haben aber

Fig. 5.



drei Potenzlinien, die sich in einem Punkte P schneiden. Die Potenzlinie von K und K_1 ist CD, diejenige von K_1 und K_2 natürlich AB, und die dritte von K und K_2 geht nothwendigerweise durch den Schnittpunkt P von AB und CD. Da aber K und K_2 sich berühren, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente, also jedenfalls Tangente an K. Man lege desshalb von

d. h. das von P auf $M_1 M_2$ gefällte Perpendikel ist die Linie gleicher Potenzen.

Es bleibt nur noch übrig, den Punkt Q zu bestimmen, wozu die Gleichungen dienen:

$$M_1 Q + Q M_2 = d \text{ und } M_1 Q^2 - Q M_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

woraus durch Division folgt: $M_1 Q - Q M_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$, so dass man hat: $2\, M_1 Q = d + \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$ und $2\, Q M_2 = d - \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$ wodurch Q vollständig gegeben ist.

Wir gehen jetzt noch darauf ein, die Beziehung anzugeben, in welcher die Potenzlinie zweier Kreise, oder die Linien ihrer gleichen Tangenten [was offenbar gleichbedeutend ist] zu der gegenseitigen Lage der beiden Kreise steht. Schneiden sich zwei Kreise, so fällt die Potenzlinie mit ihrer gemeinschaftlichen Sehne zusammen, denn für jeden Schnittpunkt der beiden Kreise ist die Potenz nach dem einen sowohl als nach dem andern derselben gleich Null. Berühren sich die Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente zugleich Potenzlinie. Liegen die Kreise ausser einander, so geht die Potenzlinie zwischen ihnen durch, ohne einen von beiden zu schneiden, und wenn endlich einer von den Kreisen den andern einschliesst, so liegt die Potenzlinie ausserhalb derselben und zwar auf der Centrallinie mit dem Mittelpunkt des eingeschlossenen Kreises auf derselben Seite vom Mittelpunkte des einschliessenden Kreises. Da für conzentrische Kreise $d = 0$ ist, also $M_1 Q$ und $Q M_2$ unendlich werden, so liegt in diesem Falle die Potenzlinie ganz in unendlicher Entfernung.

Drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ bestimmen zu je zweien genommen drei Potenzlinien, welche wir so bezeichnen wollen, dass $M_2 M_3$ und P_1, $M_3 M_1$ und P_2, $M_1 M_2$ und P_3 zusammengehören; die drei Geraden $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich dann in einem Punkte, dem Potenzpunkte der drei Kreise. In der That, sei P der Durchschnitt von P_1 und P_2, so ist für P die Potenz nach M_2 gleich derjenigen nach M_3 und ebenso die Potenz nach M_3 gleich derjenigen nach M_1, also auch die Potenz nach M_1 gleich derjenigen nach M_2, d. h. P liegt wirklich auf der Potenzlinie P_3 der Kreise M_1 und M_2.

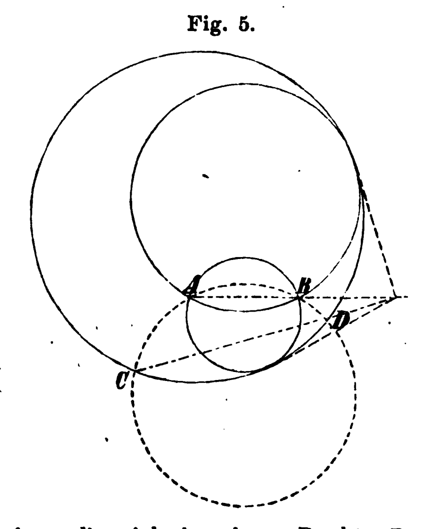
Zieht man von P aus [insofern diess möglich ist] je zwei Tangenten an jeden der Kreise, so sind dieselben alle gleichlang

und ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kreise, der alle drei gegebenen rechtwinklig schneidet, wesshalb er ihr Orthogonalkreis heisst.

Die bewiesene Eigenschaft, dass die drei Potenzlinien dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden, dient dazu, die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise M_1 und M_2 zu finden. Man construire einen Kreis M_3, welcher sowohl M_1 als M_2 schneidet, dann sind die gemeinschaftlichen Sehnen von M_3 und M_1 und von M_3 und M_2 zwei von den drei Potenzlinien der drei Kreise $M_1 M_2 M_3$, die dritte gesuchte geht also durch ihren Schnittpunkt; sie steht zudem senkrecht auf der Centrallinie $M_1 M_2$, wodurch sie vollständig bestimmt ist.

Eine zweite Anwendung des Satzes gibt die Construction des Kreises, welcher durch zwei Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis K berührt. Sei K_2 der gesuchte Kreis, so lege man durch A und B einen beliebigen Kreis K_1, welcher K in zwei Punkten C und D schneidet. Die Kreise $K K_1 K_2$ haben aber

Fig. 5.



drei Potenzlinien, die sich in einem Punkte P schneiden. Die Potenzlinie von K und K_1 ist CD, diejenige von K_1 und K_2 natürlich AB, und die dritte von K und K_2 geht nothwendigerweise durch den Schnittpunkt P von AB und CD. Da aber K und K_2 sich berühren, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente, also jedenfalls Tangente an K. Man lege desshalb von

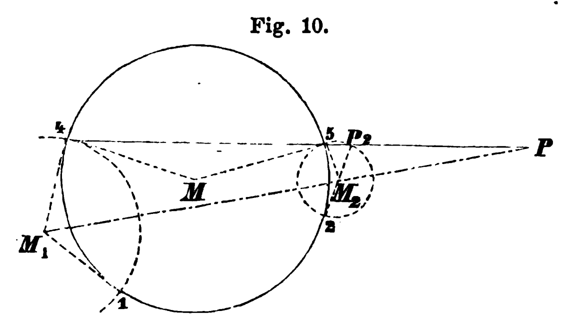
4 mit 5, 5 mit 6 und 6 mit 1, so entsteht ein dem Kreise eingeschriebenes Sechseck. [In unsrer Figur haben wir absichtlich, um die Allgemeinheit der Betrachtung beizubehalten, die Punkte so gewählt, dass sie nicht ein gewöhnliches convexes, sondern ein überschlagenes Kreissechseck bilden.]

In diesem Sechseck nennen wir je die Ecken 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 gegenüberliegende Ecken und je die Seiten 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 gegenüberliegende Seiten. Es gilt nun der von Pascal herrührende Satz: In einem Kreissechseck schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Es sei P der Durchschnitt von 12 und 45, Q der Durchschnitt von 23 und 56, R der Durchschnitt von 34 und 61, dann wird der Satz bewiesen, wenn man zeigt, dass P, Q, R aufgefasst werden können als das System von drei äussern Aehnlichkeitspunkten oder das System von einem äussern und den zwei ihm nicht zugehörigen innern Aehnlichkeitspunkten dreier Kreise. Zu diesem Zwecke lege man in je zwei gegenüberliegenden Ecken die Tangenten an den Kreis M und construire von ihrem Schnittpunkte aus als Mittelpunkt einen Kreis, der die Ecken enthält, so erhält man drei Kreise, nämlich für 1 und 4 den Kreis M_1, für 2 und 5 den Kreis M_2 und für 3 und 6 den Kreis M_3. In Bezug nun auf diese Kreise $M_1 M_2 M_3$, von denen jeder M rechtwinklig schneidet, sind PQR ein System von Aehnlichkeitspunkten auf einer Geraden.

Legt man in 4 die Tangente an M_1 und in 5 die Tangente an M_2, so schneiden sich diese beiden Tangenten in dem Mittel-

Fig. 10.



punkte M des Kreises M. Es ist also M 45 ein gleichschenkliges Dreieck und $\sphericalangle M45 = M54$ und auch $\sphericalangle M_1 45 = M_2 54$, da um

diese Winkel zu erhalten man einfach nur zu jedem der Vorigen einen Rechten zu addiren hat.

Es ist ferner $\triangle\ M_2 5 p_2$ ein gleichschenkliges, wenn p_2 den zweiten Durchschnittspunkt von 45 mit dem Kreise M_2 bezeichnet, also $\sphericalangle\ M_2 5 p_2 = M_2 p_2 5$, woraus folgt $\sphericalangle\ M_2 p_2 P = M_2 54 = M_1 45$ d. h. $M_1 4$ und $M_2 p_2$ sind parallele Radien, und da sie zudem gleichgerichtet sind, so geht 45 durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2. Durchaus in gleicher Weise wird gezeigt, dass 12 ebenfalls durch den äussern Aehnlichkeitspunkt von $M_1 M_2$ geht, also ist dieser mit P identisch. Es bedarf keiner weitern Ausführung mehr, dass Q der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_2 und M_3 und R der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_3 ist. Unter Beachtung aller angegebenen Beweiselemente kann man nun den Pascal'schen Satz als für jedes Kreissechseck bewiesen annehmen.

§ 5. Harmonische Punkte und Strahlen.

Vier Punkte $AA'BB'$ auf einer Geraden, welche der Proportion:

$$AB : BA' = AB' : A'B'$$

genügen, und welche so liegen, dass nicht zwei gleiche Buchstaben auf einander folgen, heissen harmonische Punkte, und zwar nennt man je A und A', B und B' zugeordnet. Führt man die Mitte m der Punkte A und A' ein, so verwandelt sich unsere Grundrelation in folgende:

$$Am + mB : mA' - mB = Am + mB' : mB' - mA',$$

und indem man durch Multiplication der äussern und innern Glieder die Proportion zu einer Gleichung macht, findet man nach gehöriger Reduction

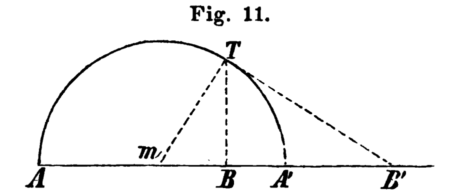
$$mA^2 = mA'^2 = mB \,.\, mB'$$

Diese Formel gewährt einen leichten Einblick in die möglichen gegenseitigen Lagen von vier harmonischen Punkten; sie zeigt ferner an, dass zu drei Punkten, von denen zwei als zugeordnete bestimmt sind, nur ein vierter harmonischer Punkt möglich ist, und schliesslich ergibt sie eine einfache Construction dieses vierten Punktes.

Es seien in der That A und A' als zugeordnete Punkte gegeben und B liege zunächst auf der Strecke AA' selbst, dann bestimmt sich B' wie folgt:

Man schlage über AA' einen Halbkreis, welcher von dem Perpendikel in B auf AA' in T getroffen werde. Die Tangente

Fig. 11.



in T an den Halbkreis schneidet den gesuchten Punkt B' auf AA' aus. Zum Beweise dient:

$$\triangle\, mTB' \sim TBM \text{ also}$$
$$mB : mT = mT : mB' \text{ und da}$$
$$mT = mA = mA', \text{ so hat man}$$
$$mA^2 = mB \,.\, mB'.$$

Läge B auf der Verlängerung von AA', so wäre die Construction ebenso leicht. Man würde nämlich von B aus die Tangente an den Halbkreis über AA' legen und dann wäre der Fusspunkt des von ihrem Berührungspunkte auf AA' gefällten Perpendikels der gesuchte vierte harmonische Punkt B'.

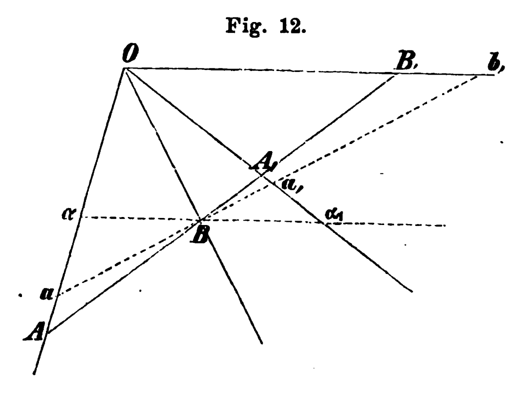
Von bemerkenswerthen speciellen Fällen sei zunächst hervorgehoben, dass wenn B in die Mitte m von AA' fällt, dann B' ins Unendliche zu liegen kommt, und umgekehrt, ist B' irgend ein unendlicher entfernter Punkt der Geraden AA', so fällt B mit m zusammen. Um nun den Satz nicht umstossen zu müssen, dass drei Punkte bei bestimmter Zuordnung nur einen vierten harmonischen bestimmen, bedient man sich des Ausdruckes: Auf einer Geraden gibt es, vom Gesichtspunkte der harmonischen Eigenschaften aus aufgefasst, nur einen unendlich entfernten Punkt. Sollten also A und A' zugeordnet sein, so bestimmt der unendlich entfernte Punkt mit m, A und A' ein System harmonischer Punkte.

Wenn ferner B mit A' zusammenfällt, so thut diess auch B', d. h. wenn von vier harmonischen Punkten zwei sich vereinigen, so fällt allemal auch ein dritter mit ihnen zusammen.

Vier Strahlen, welche von einem Punkte O aus durch vier harmonische Punkte gezogen werden, heissen vier **harmonische Strahlen**. Sie haben die Eigenschaft, dass sie von jeder beliebigen Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Seien AA_1 BB_1 vier harmonische Punkte, $O\,(AA_1BB_1)$ vier harmonische Strahlen, so ziehe man durch B eine Parallele zu OB_1, welche OA in α und OA_1 in α_1 treffen möge. Es ist nun $AB : AB_1 = \alpha B : OB_1$ und $BA_1 : A_1B_1 = \alpha_1 B : OB_1$. Nach

Fig. 12.



der Fundamentalrelation für harmonische Punkte sind aber die linken Seiten dieser beiden Proportionen gleich, also auch die rechten, woraus folgt: $\alpha B = \alpha_1 B$, d. h. die Transversale $\alpha B \alpha_1$ wird von den vier harmonischen Strahlen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Ziehe ich nun durch B irgend eine andere Transversale aBa_1b_1, so ist
$aB : ab_1 = \alpha B : OB_1$ und $a_1B : a_1b_1 = \alpha_1 B : OB_1$; da aber $\alpha B = \alpha_1 B$, so ist nach gehöriger Anordnung $aB : a_1B = ab_1 : a_1b_1$, woraus folgt: jede durch B gehende Transversale gibt vier harmonische Punkte auf den vier harmonischen Strahlen. Ist aber der Satz für eine durch B gehende Transversale bewiesen, so gilt er auch für jede zu dieser Transversalen parallel gezogenen Geraden, d. h.: vier harmonische Strahlen werden von jeder beliebigen Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Will man nun zu drei Strahlen, von denen zwei als zugeordnet bestimmt sind, den vierten harmonischen Strahl construiren, so ziehe man irgend eine Transversale und suche zu ihren drei Schnittpunkten mit den drei gegebenen Strahlen mit derselben Zuordnung den vierten harmonischen Punkt; durch diesen geht dann der vierte harmonische Strahl.

Als interessante spezielle Fälle von vier harmonischen Strahlen ergeben sich von selbst: 1) Die unbegrenzt gedachten Schenkel

d. h. das von P auf $M_1 M_2$ gefällte Perpendikel ist die Linie gleicher Potenzen.

Es bleibt nur noch übrig, den Punkt Q zu bestimmen, wozu die Gleichungen dienen:

$$M_1 Q + Q M_2 = d \text{ und } M_1 Q^2 - Q M_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

woraus durch Division folgt: $M_1 Q - Q M_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$, so dass man hat: $2\, M_1 Q = d + \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$ und $2\, QM_2 = d - \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$ wodurch Q vollständig gegeben ist.

Wir gehen jetzt noch darauf ein, die Beziehung anzugeben, in welcher die Potenzlinie zweier Kreise, oder die Linien ihrer gleichen Tangenten [was offenbar gleichbedeutend ist] zu der gegenseitigen Lage der beiden Kreise steht. Schneiden sich zwei Kreise, so fällt die Potenzlinie mit ihrer gemeinschaftlichen Sehne zusammen, denn für jeden Schnittpunkt der beiden Kreise ist die Potenz nach dem einen sowohl als nach dem andern derselben gleich Null. Berühren sich die Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente zugleich Potenzlinie. Liegen die Kreise ausser einander, so geht die Potenzlinie zwischen ihnen durch, ohne einen von beiden zu schneiden, und wenn endlich einer von den Kreisen den andern einschliesst, so liegt die Potenzlinie ausserhalb derselben und zwar auf der Centrallinie mit dem Mittelpunkt des eingeschlossenen Kreises auf derselben Seite vom Mittelpunkte des einschliessenden Kreises. Da für conzentrische Kreise $d = 0$ ist, also $M_1 Q$ und QM_2 unendlich werden, so liegt in diesem Falle die Potenzlinie ganz in unendlicher Entfernung.

Drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ bestimmen zu je zweien genommen drei Potenzlinien, welche wir so bezeichnen wollen, dass $M_2 M_3$ und P_1, $M_3 M_1$ und P_2, $M_1 M_2$ und P_3 zusammengehören; die drei Geraden $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich dann in einem Punkte, dem Potenzpunkte der drei Kreise. In der That, sei P der Durch-
·t von P_1 und P_2, so ist für P die Potenz nach M_2 gleich
·en nach M_3 und ebenso die Potenz nach M_3 gleich der-
nach M_1, also auch die Potenz nach M_1 gleich derjenigen
d. h. P liegt wirklich auf der Potenzlinie P_3 der Kreise

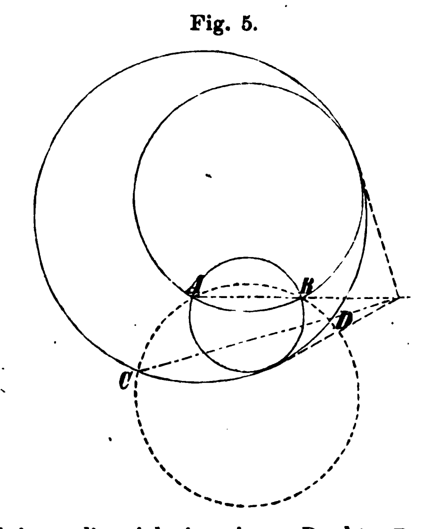
an von P aus [insofern diess möglich ist] je zwei
ı jeden der Kreise, so sind dieselben alle gleichlang

und ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kreise, der alle drei gegebenen rechtwinklig schneidet, wesshalb er ihr Orthogonalkreis heisst.

Die bewiesene Eigenschaft, dass die drei Potenzlinien dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden, dient dazu, die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise M_1 und M_2 zu finden. Man construire einen Kreis M_3, welcher sowohl M_1 als M_2 schneidet, dann sind die gemeinschaftlichen Sehnen von M_3 und M_1 und von M_3 und M_2 zwei von den drei Potenzlinien der drei Kreise $M_1 M_2 M_3$, die dritte gesuchte geht also durch ihren Schnittpunkt; sie steht zudem senkrecht auf der Centrallinie $M_1 M_2$, wodurch sie vollständig bestimmt ist.

Eine zweite Anwendung des Satzes gibt die Construction des Kreises, welcher durch zwei Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis K berührt. Sei K_2 der gesuchte Kreis, so lege man durch A und B einen beliebigen Kreis K_1, welcher K in zwei Punkten C und D schneidet. Die Kreise $K K_1 K_2$ haben aber

Fig. 5.



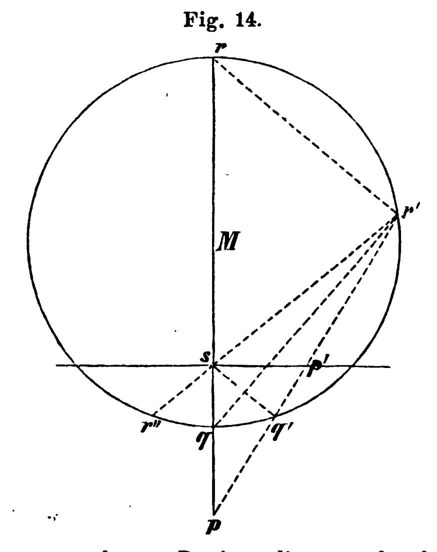
drei Potenzlinien, die sich in einem Punkte P schneiden. Die Potenzlinie von K und K_1 ist CD, diejenige von K_1 und K_2 natürlich AB, und die dritte von K und K_2 geht nothwendigerweise durch den Schnittpunkt P von AB und CD. Da aber K und K_2 sich berühren, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente, also jedenfalls Tangente an K. Man lege desshalb von

§ 6. Pol und Polare.

Legt man in der Ebene eines Kreises M durch einen beliebigen Punkt p eine Sehne, welche den Kreis in den Punkten q und r schneiden möge und bestimmt zu pqr den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p', so nennt man p und p' ein harmonisches Punktenpaar in Bezug auf den Kreis. Es gilt nun der Satz: Bestimmt man zu p alle diejenigen Punkte p_1, welche mit ihm ein harmonisches Punktenpaar bilden, so liegen dieselben auf einer geraden Linie, welche die Polare des Punktes p heisst. Der Beweis beruht wesentlich auf dem Satze: Bilden von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete einen rechten Winkel, so halbiren sie die Winkel der beiden andern Strahlen und umgekehrt: halbirt einer von vier harmonischen Strahlen den Winkel zweier zugeordneter Strahlen, so bildet er mit seinem zugeordneten einen rechten Winkel.

Wir nehmen p zunächst ausserhalb des Kreises an. Wenn man nun den durch p gehenden Durchmesser qr zieht, so wird

Fig. 14.



auf ihm ein p zugeordneter Punkt s liegen, durch welchen die Polare gehen muss. Da zudem die ganze Figur zu diesem Durchmesser symmetrisch ist, so steht die Polare auf ihm senkrecht. Der Beweis unseres Satzes wird also geführt, wenn man für

einen beliebigen Punkt p' zeigt, dass er auf dem Perpendikel auf qr in s liegt. Sei jetzt $q'r'$ eine durch p gezogene Secante, welche den Punkt p' ergibt, dann sind r' $(rsqp)$ vier harmonische Strahlen, da sie von einem Punkte aus durch vier harmonische Punkte gezogen sind. Zwei von ihnen, $r'r$ und $r'q$ stehen senkrecht auf einander, folglich halbirt $r'q$ den Winkel der Strahlen $r's$ und $r'p$. Wenn man mit r'' den zweiten Durchschnitt von sr' mit dem Kreise M bezeichnet, so müssen demzufolge die Bogen $r''q$ und qq' einander gleich sein, also auch die Winkel $r''sq$ und qsq'. Aber die Punkte $pq'p'r'$ sind harmonische, desshalb sind s $(pq'p'r')$ vier harmonische Strahlen. Der Winkel zweier entsprechender derselben [sr' resp. seine Verlängerung und sq'] wird durch den dritten (sp) halbirt, folglich steht der vierte (sp') auf diesem senkrecht, d. h. p' liegt wirklich auf dem in s auf rq errichteten Perpendikel. Der Beweis gilt ebenso für einen Punkt p, welcher innerhalb des Kreises liegt.

Während die gefundene Gerade, die mit P bezeichnet werden möge, wie bereits bemerkt, die Polare des Punktes p genannt wird, heisst umgekehrt p der Pol der Geraden P. — Ueber den Zusammenhang von Pol und Polare finden nun eine Reihe von Sätzen statt, von denen wir die nachfolgenden herausheben.

Liegt der Pol innerhalb des Kreises, so schneidet die Polare den Kreis nicht.

Liegt der Pol ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare den Kreis in zwei Punkten, welche die Berührungspunkte der vom Pole aus an den Kreis gezogenen Tangenten sind. In diesem Falle ist also die Polare zugleich die Berührungssehne der Tangenten. [Da es nun auf der Polaren Punkte gibt, deren Verbindungsgerade mit dem Pole nicht mehr zwei Punkte auf dem Kreise ausschneidet, so bilden diese Punkte mit dem Pole nicht mehr im eigentlichen Sinne des Wortes harmonische Punktenpaare in Bezug auf den Kreis. Man nennt desshalb in allgemeinerer Auffassung harmonische Punktenpaare des Kreises solche, welche die Eigenschaft haben, dass die Polare des einen durch den andern geht.]

Liegt der Pol auf dem Kreise selbst, so ist die Polare zugleich die Tangente im Pole an den Kreis.

Diese Sätze lassen sich sofort umkehren.

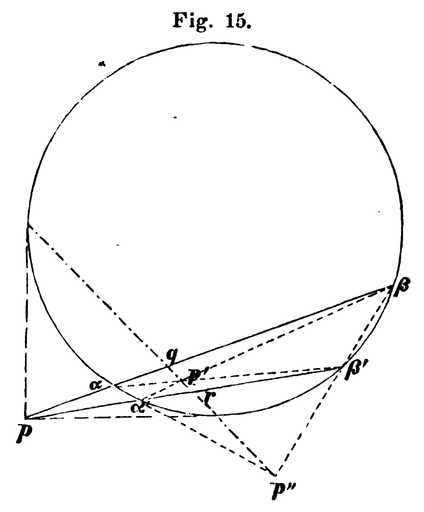
Zu jedem Punkte existirt eine und nur eine Polare, und

umgekehrt: zu jeder Polaren ein und nur ein Pol, den man construirt, indem man den zur Polaren senkrechten Durchmesser zieht, und zu seinen beiden Durchschnittspunkten mit dem Kreise und seinem Durchschnittspunkte mit der Polaren den vierten harmonischen Punkt, der dem letztern zugeordnet ist, bestimmt; dieser ist der gesuchte Pol. Der Pol eines Durchmessers ist ein unendlich entfernter Punkt, die Polare des Mittelpunkts eine unendlich entfernte Gerade. Da aber zu einem Punkte nur eine Polare gehört und umgekehrt, so wird man auf die bereits früher gemachte Bemerkung geführt, dass in der Ebene in Ansehung harmonischer Eigenschaften nur eine unendlich entfernte Gerade angenommen werden darf.

Bewegt sich der Pol auf einer Geraden G, so dreht sich die Polare um einen Punkt g, welcher der Pol der Geraden G ist. Wenn sich die Polare um einen Punkt g dreht, so durchläuft der Pol eine Gerade G, welche die Polare des Punktes g ist. Liegen also z. B. drei Punkte auf einer Geraden, so laufen ihre Polaren durch einen Punkt.

Die in § 5 gegebene Eigenschaft des vollständigen Vierseits führt zu folgender Construction der Polaren eines Punktes p in Bezug auf einen Kreis M.

Fig. 15.



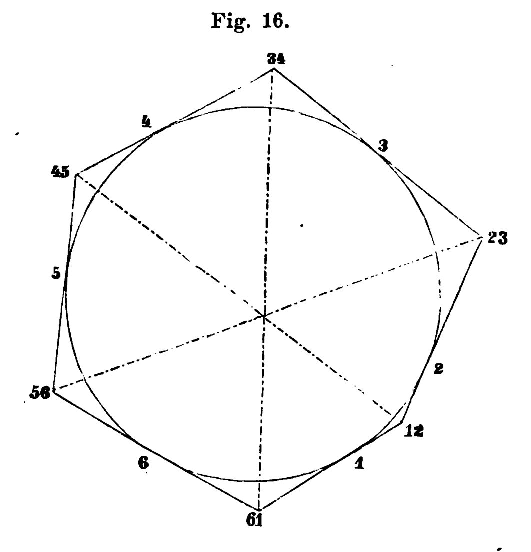
Seien $p\alpha\beta$, $p\alpha'\beta'$ zwei von p ausgehende Secanten im Kreise, so ziehe man die Geraden $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$ und $\alpha'\beta$,

welche sich in p' und p'' schneiden. Wenn nun die Gerade $p'p''$ die Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ resp. in q und r trifft, so kann man $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ als Seiten eines vollständigen Vierseits auffassen, dessen Diagonalen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, und $p'p''$ sind. $p\alpha q\beta$ und $p\alpha' r\beta'$ sind also harmonische Punkte, und $p'p''$ ist die Polare des Punktes p.

Wie man sieht, ist diese Construction linear, und aus ihr folgt nun, da ja die Polare zugleich Berührungssehne ist, die lineare Construction der beiden Tangenten, welche von einem Punkte aus an einen Kreis gelegt werden können.

Vermittelst der Theorie von Pol und Polare können wir aus dem Pascal'schen Satze einen Satz herleiten, der von Brianchon über das dem Kreise umgeschriebene Sechseck aufgestellt worden ist.

Fig. 16.



Sechs Tangenten, welche wir in irgend einer Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnen, heissen ein dem Kreise umschriebenes Sechseck. Die successiven Schnittpunkte von 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 1 nennen wir die Ecken desselben, und zwar werden 1 2 und 4 5, 2 3 und 5 6, 3 4 und 6 1 als gegenüberliegende Ecken definirt. Nach Brianchon schneiden sich nun die Verbindungsgeraden je zweier gegenüberliegender Ecken [die Hauptdiagonalen des Sechsecks] in einem und demselben Punkte.

Zum Beweise suche ich in der angegebenen Figur zu jedem Punkte seine Polare und zu jeder Geraden ihren Pol. Jede der sechs Tangenten wird zu ihrem Berührungspunkte, also das umschriebene Sechseck zu einem eingeschriebenen. Die Ecken des ersten werden zu Seiten des zweiten und die Hauptdiagonalen des ersten zu den Durchschnittspunkten der gegenüberliegenden Seiten des zweiten. Diese Punkte liegen aber nach dem Satze von Pascal auf einer Geraden, also schneiden sich ihre Polaren, die Hauptdiagonalen des umschriebenen Sechsecks in einem Punkte, wodurch der Satz von Brianchon bewiesen ist.

Zweites Kapitel.

Der geometrische Ort.

§ 7. Definition und Beispiele.

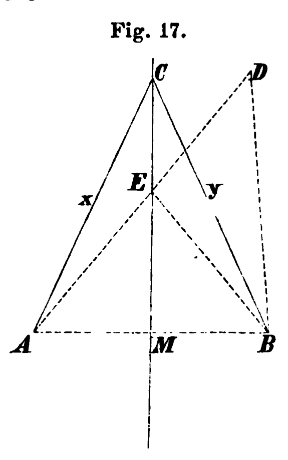
Es kann vorkommen, dass in einer Aufgabe ein gesuchter Punkt nicht vollständig bestimmt ist, sondern dass unendlich viele Punkte den gestellten Bedingungen genügen, während dennoch diese Bedingungen nicht für jeden beliebigen Punkt der Ebene erfüllt sind. Man nennt dann die Zusammenfassung aller Punkte, welche die Aufgabe lösen, den geometrischen Ort des gesuchten Punktes.

Das einfachste Beispiel bietet der Kreis; er ist der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche gleichweit von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte, abstehen. Hier ist wesentlich zu beachten, dass jeder Punkt, welcher die gegebene Entfernung von dem festen Punkte hat, auf dem Kreise liegt, und dass umgekehrt jeder Punkt, welcher auf dem Kreise liegt, in der gegebenen Entfernung vom Mittelpunkte sich befindet. Ferner: wenn irgend ein Punkt der gestellten Bedingung nicht genügt, so liegt er nicht auf dem Kreise, umgekehrt: liegt er nicht auf dem Kreise, so genügt er der gestellten Bedingung nicht. Endlich findet man noch, dass für jeden Punkt ausserhalb des Kreises die Entfernung vom Mittelpunkte grösser ist, als für einen Punkt des Kreises, und dass für jeden Punkt innerhalb des Kreises die Entfernung vom Mittelpunkte kleiner ist, als für einen Punkt des Kreises. Durch Umkehrung folgert man hieraus, dass jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte grösser ist, als die Entfernung eines Punktes auf dem Kreise von diesem Punkte, ausserhalb des Kreises liegen muss, und dass jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte kleiner ist, als die Entfernung eines

Kreispunktes von demselben, sich nothwendig innerhalb des Kreises befindet.

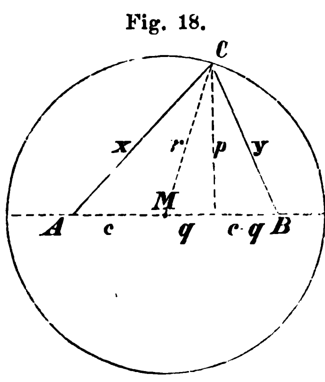
Sind zwei feste Punkte A und B gegeben, und es soll ein dritter Punkt C derart bestimmt werden, dass zwischen $AC = x$ und $BC = y$ stets eine bestimmte Relation gilt, so wird man für C einen geometrischen Ort finden, der durch die gegenseitige Lage von A und B und durch die Gleichung zwischen x und y gegeben ist.

Fig. 17.



1) Soll $x = y$ sein, so erhält man für den Punkt C eine Gerade, welche in der Mitte M von AB auf AB senkrecht steht. Hier müssen die vorhin beim Kreise gemachten Erörterungen wiederholt werden. Man findet dann unter Anderm: Liegt ein Punkt D mit B auf derselben Seite der Ortsgeraden CM, so ist für ihn $AD > BD$ und umgekehrt: ist $AD > BD$, so liegt D mit B auf derselben Seite von CM. Zum Beweise ziehe man BE, wo E der Durchschnitt von AD mit CM ist. Nun hat man $AD = AE + ED = BE + ED$. Da aber in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten grösser ist als die dritte, so haben wir aus dem Dreieck BDE: $BE + ED > DB$, also $AD > BD$.

Fig. 18.



2) Für $x^2 + y^2 = a^2$ erhält man einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Mitte M von AB und dessen Radius $r = \sqrt{\frac{a^2 - 2c^2}{2}}$ ist, wenn $2c$ die Entfernung von A und B bedeutet. Man hat nämlich:

$$x^2 = p^2 + (c + q)^2;$$
$$y^2 = p^2 + (c - q)^2, \text{ also}$$
$$x^2 + y^2 = a^2 = 2p^2 + 2c^2 + 2q^2,$$

woraus $p^2 + q^2 = r^2 = \frac{a^2 - 2c^2}{2}$ folgt. Es ist also r constant und der gesuchte Ort der genannte Kreis. Für jeden Punkt ausserhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 > a^2$,

für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 < a^2$; der kleinste Werth, den $x^2 + y^2$ überhaupt erlangen kann, ist $= 2c^2$. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die Summe der beiden Quadrate auf jedem Kreise constant ist, der M zum Mittelpunkte hat.

3) Wenn $x^2 - y^2 = a^2$ ist, so resultirt als Ort des Punktes C eine Gerade, die senkrecht zu AB steht, in einem Punkte Q, für welchen man hat: $AQ^2 - BQ^2 = a^2$. In der That ist

$$x^2 = h^2 + AQ^2$$
$$y^2 = h^2 + BQ^2, \text{ also}$$
$$x^2 - y^2 = AQ^2 - BQ^2 = a^2.$$

Fig. 19.

Um den Punkt Q zu finden, hat man:

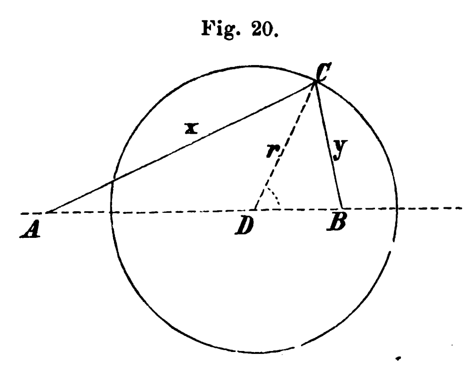
$AQ^2 - BQ^2 = a^2$, $AQ + BQ = 2c$, dessbalb

$$AQ - BQ = \frac{a^2}{2c}.$$

Aus der Summe und Differenz der beiden Grössen AQ und BQ kann man die Lage des Punktes Q bestimmen. [Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass dieses Resultat bei der Bestimmung der Potenzlinie zweier Kreise benutzt wurde.]

4) Die beiden zuletzt behandelten Orte sind spezielle Fälle des durch die Gl. $\alpha x^2 + \beta y^2 = a^2$ bestimmten. Man findet

Fig. 20.



für ihn einen Kreis, dessen Mittelpunkt D so bestimmt ist, dass $AD : BD = \beta : \alpha$. Man hat nun, im Falle, dass β und α gleiches

Vorzeichen besitzen [wenn man von den beiden Punkten, welche die Gl. für D ergibt, den auf der Strecke AB gelegenen wählt]:

$$x^2 = r^2 + AD^2 + 2r \,.\, AD \cos D$$
$$y^2 = r^2 + BD^2 - 2r \,.\, BD \cos D$$
$$a^2 = \alpha\, x^2 + \beta\, y^2 = (\alpha + \beta)\, r^2 + \alpha \,.\, AD^2 + \beta \,.\, BD^2$$
$$+ 2r \cos D \,.\, (\alpha \,.\, AD - \beta \,.\, BD).$$

Laut Annahme über den Punkt D ist aber $\alpha \,.\, AD = \beta \,.\, BD$, so dass $r = \frac{a^2 - (\alpha \,.\, AD^2 + \beta \,.\, BD^2)}{\alpha + \beta}$, also constant ist, d. h. der Ort von C ist ein Kreis.

Ist α positiv und β negativ, so muss man den auf der Verlängerung der Strecke AB gelegenen Punkt D wählen; im Falle $\beta = -\alpha$ fällt er ins Unendliche und der zugehörige Kreis wird zur Geraden, was den Ort in 3) ergibt.

5) Es soll schliesslich der Ort der Punkte bestimmt werden, für welche $\frac{x}{y} = a$. Zunächst suchen wir unter diesen Punkten diejenigen auf, welche auf der Geraden AB liegen; es ist klar, dass es einen solchen, F, auf der Strecke AB selbst gibt, und einen andern, G, auf ihrer Verlängerung. Wir nehmen nun einen bekannten Satz aus der Planimetrie zu Hülfe, der also lautet: In einem Dreieck theilt die Halbirungslinie des Winkels C an der Spitze die Grundlinie AB im Verhältniss der anliegenden

Fig. 21.

Seiten; dasselbe gilt auch von der Halbirungslinie des Nebenwinkels von C. Sei jetzt C ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes, so construire man die halbirenden Geraden des Winkels ACB und seines Nebenwinkels. Diese treffen AB in Punk-

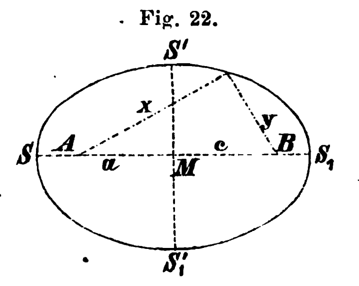
ten, welche die Strecke AB in dem Verhältniss $\frac{AC}{CB} = \frac{x}{y} = a$ theilen, also in den Punkten F und G. Da aber die beiden Halbirungsgeraden senkrecht auf einander stehen, so ist der Winkel FCG ein rechter und C befindet sich auf dem Kreise, der über FG als Durchmesser beschrieben ist; dieser Kreis ist desshalb der gesuchte geometrische Ort. Es bedarf keines Beweises, dass die Punkte $AFBG$ harmonisch sind.

Dieser behandelte Ort lässt sich aus dem Vorigen [in 4)] ableiten, indem man für α einen positiven, für β einen negativen Werth wählt und zugleich $a = 0$ setzt.

§ 8. Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Der geometrische Ort des Punktes, welcher die Eigenschaft hat, dass die Summe seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B constant und zwar $= 2a$ ist, heisst Ellipse und ist eine geschlossene, stetig convexe Curve.

Fig. 22.



A und B heissen die Brennpunkte der Ellipse, ihre Verbindungsgerade ist eine Symmetrieaxe derselben, ebenso das Perpendikel, das in der Mitte M von A und B auf AB errichtet ist, so dass also die Ellipse aus vier congruenten Quadranten besteht. M heisst der Mittelpunkt der Ellipse, weil jede durch ihn gehende Gerade auf derselben zwei Punkte gibt, welche gleichweit von M abstehen.

Um eine genaue Vorstellung der Curve zu erhalten, kann man dieselbe mechanisch construiren. Man schlinge einen geschlossenen Faden von der Länge $2a + 2c$ [wo $2c = AB$ ist] um die Brennpunkte A und B herum und beschreibe dann mit dem Stifte, bei stets straff gehaltenem Faden, eine krumme Linie, bis dieselbe in sich selbst zurückläuft, so ist diese die Ellipse.

Auf der Geraden AB befinden sich zwei Punkte der Ellipse, die Scheitel S und S_1, deren Entfernung $= 2a$ ist und die grosse Axe oder Hauptaxe heisst; ebenso liegen zwei Punkte der Curve, die Scheitel S' und S_1' auf der zweiten Symmetrieaxe; ihre Entfernung $2b$ wird die kleine Axe oder Nebenaxe genannt.

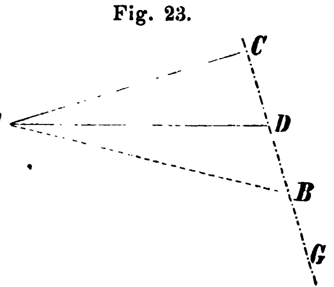
Da $2c$ die Entfernung der Punkte A und B bezeichnet [wir nennen c die Excentrizität der Ellipse], so hat man die Gleichung $b^2 + c^2 = a^2$, d. h. die halbe grosse Axe ist sowohl grösser als die halbe kleine Axe, als auch grösser als die Excentrizität, was durch die allereinfachsten geometrischen Betrachtungen ebenfalls erwiesen werden kann. Alle Ellipsen, bei denen das Verhältniss $\frac{b}{a}$ [das stets zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt] ein constantes ist, sind ähnlich; man braucht also nur für einen bestimmten Werth von a alle Ellipsen zu construiren, um sofort die Verschiedenheit der äusseren Formen zu übersehen, welche die Ellipse überhaupt darbieten kann. [Nur ist zu bemerken, dass unter den Ellipsen vom Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ auch eine sich befindet, welche sich auf einen Punkt reduzirt.] Wenn b zunächst sein Maximum angenommen hat, das $= a$ ist, so muss $c = 0$ sein, d. h. für den Fall, dass die beiden Axen gleich sind, fallen die Brennpunkte zusammen und die Ellipse ist identisch mit dem Kreise vom Radius a. Nimmt jetzt b immer mehr ab, so verflacht sich die Ellipse; die Brennpunkte rücken immer weiter aus einander, bis schliesslich $b = 0$ geworden ist, in welchem Falle die Brennpunkte mit den Scheiteln der grossen Axe zusammenfallen, und die Ellipse sich auf die grosse Axe reduzirt, die man sich doppelt gelegt vorstellen muss. Hätte man einen bestimmten Werth für die kleine Axe $2b$ festgehalten, und die grosse Axe sich verändern lassen, dann wäre für diese der kleinste Werth $= 2b$ und die entsprechende Ellipse identisch mit dem Kreise vom Radius b gewesen. Wenn jetzt die grosse Axe wächst, so nimmt auch die Excentrizität zu, die Ellipse erscheint immer flacher, bis für einen unendlich grossen Werth der Hauptaxe [der in diesem Falle auch einen unendlich grossen Werth der Excentrizität nach sich zieht] die Ellipse ausartet in zwei parallele Gerade, deren Abstand $= 2b$ ist. Schliesslich setzen wir fest, dass die Excentrizität c [oder was gleiche Bedeutung hat, der Abstand der Brennpunkte] unverändert bleibe. Der kleinste Werth der grossen Axe ist dann $2c$ und die zugehörige Ellipse ist die gerade Verbindungsstrecke der Brennpunkte, doppelt gelegt. Wächst die grosse Axe, so nimmt b zu und mit ihm das Verhältniss $\frac{b}{a}$, das alle Werthe von 0 bis 1 successive

annimmt, jedoch so, dass es letztern Werth erst für ein unendlich grosses a erreicht. Die Ellipse nähert sich also in ihrer Form immer mehr dem Kreise, wird aber dann erst zu einem solchen, wenn alle ihre Punkte in's Unendliche gerückt sind.

Das wesentliche Ergebniss dieser Betrachtungen ist, dass es folgende spezielle Fälle der Ellipse gibt: 1) der Kreis, 2) ein begrenztes Stück einer geraden Linie, das man sich doppelt gelegt vorstellt, 3) zwei parallele Gerade, 4) ein Punkt.

Es soll nun noch gezeigt werden, dass die Ellipse von einer Geraden G nie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, oder mit andern Worten, dass über einer gegebenen Grundlinie höchstens zwei Dreiecke von gegebener Summe der beiden andern Seiten möglich sind, deren Spitzen in einer Geraden G liegen. Wir unterscheiden drei Fälle: 1) einer der Brennpunkte liegt auf G, 2) die Brennpunkte liegen auf verschiedener Seite von G, 3) die Brennpunkte liegen auf derselben Seite von G.

Fig. 23.

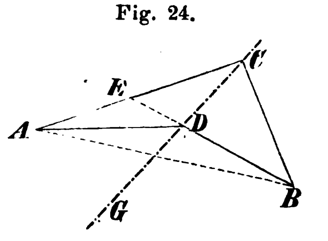


Im ersten Falle zeigt man sofort, dass auf jeder Seite von AB nur je ein Punkt der gestellten Bedingung Genüge leisten kann. Seien C und D zwei Punkte, die oberhalb AB liegen und von denen C weiter von B absteht, als D, so hat man

$$AC + CD > AD, \; AC + CD + DB > AD + DB, \text{ also}$$
$$AC + CB > AD + DB.$$

Der Werth von $AC + CB$ wächst also continuirlich, wie C sich von B entfernt, kann also einen vorgeschriebenen Werth höchstens einmal erreichen. Da auf G höchstens ein Punkt, der oberhalb AB liegt, die gegebene Summe der Seiten AC und CB erzeugt, und diess ebenso für einen Punkt unterhalb AB gilt, so kann eine durch den Brennpunkt B der Ellipse gehende Gerade in der That nur zwei Punkte mit der Ellipse gemein haben.

Fig. 24.

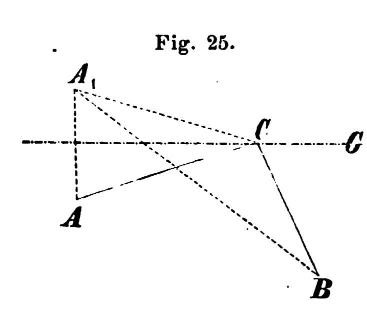


Für den zweiten Fall ist der Beweis analog:

Man hat nämlich $AE + ED > AD$; $AE + ED + DB > AD + DB$.
Ebenso $EC + CB > EB$; $AE + EC + CB > AE + EB$,
desshalb $AC + CB > AE + EB$,
also $AC + CB > AE + EB > AD + DB$
und $AC + CB > AD + DB$.

Es gibt also höchstens ein Dreieck mit der Spitze auf G oberhalb und eines unterhalb AB, welches zur Grundlinie AB und eine bestimmte Summe der übrigen beiden Seiten hat.

Fig. 25.



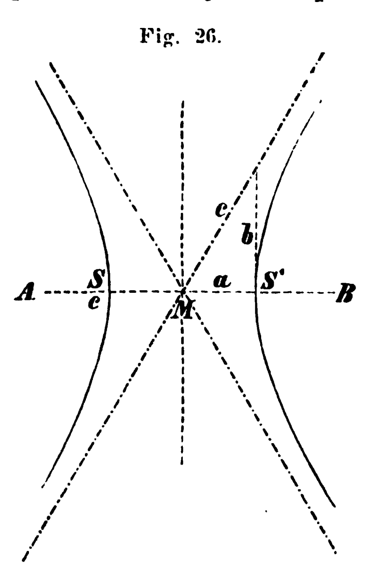
Zum Beweise des Satzes im dritten Falle ziehe man von A aus ein Perpendikel nach G und verlängere dasselbe um sich selbst zum Punkte A_1. Für einen Punkt auf G ist dann $AC + CB = A_1C + CB$. Es gibt aber nach dem vorigen Falle nur zwei Punkte auf G, für welche $A_1C + CB$ einen gegebenen Werth hat [einen über, den andern unter A_1C], also erlangt auch $AC + CB$ für die Punkte auf G höchstens zweimal einen vorgelegten Werth.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort desjenigen Punktes C, für welchen die Differenz der Abstände [oder Leitstrahlen] nach zwei festen Punkten A und B einen bestimmten Werth $2a$ hat. Will man diese Bedingung nach Art der Beispiele des § 7 in einer Gleichung ausdrücken, so hat man $\left.\begin{array}{r} x - y \\ \text{oder } y - x \end{array}\right\} = 2a$, wo x den Abstand des Punktes C von A, y den Abstand von B bedeutet. Wir müssen also zwei Gleichungen anwenden, da wir keinen der beiden Punkte A und B vor dem andern bevorzugt haben; derjenige Theil unseres Ortes, welcher der Gl. $x - y = 2a$ genügt, liegt mit A auf derselben Seite des Perpendikels, welches in der Mitte M von AB auf AB senkrecht steht, der zweite, ihm congruente Theil, welcher der Gl. $y - x = 2a$ entspricht, liegt auf der andern Seite dieser Geraden. Die Hyperbel hat, wie die Ellipse, zwei Symmetrieaxen, aber nur die eine derselben, die Hauptaxe AB hat mit ihr zwei Punkte S und S_1, die

Scheitel der grossen Axe gemein, deren Entfernung $= 2a$ ist. Die zweite in M senkrecht auf AB stehende, die Nebenaxe, wird von der Hyperbel nicht getroffen [da für sie $x - y = 0$ ist].

M heisst der Mittelpunkt der Hyperbel, jede durch ihn gelegte Gerade enthält, wenn sie überhaupt die Hyperbel schneidet, zwei Punkte derselben, die gleich weit von ihm entfernt sind. Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen, von denen je zwei, die auf derselben Seite der Nebenaxe liegen, zusammenhängen. Da man für jeden Werth des x, er mag noch so gross gewählt werden, einen zugehörigen des y findet, so folgt, dass die Curve sich ins Unendliche erstreckt. Um ihre unendlich entfernten Punkte zu finden, bemerken wir, dass für einen solchen die Leitstrahlen parallel sind. Die Differenz derselben ist dann gegeben, indem man von demjenigen Brennpunkte aus, der diess gestattet, auf den nicht zugehörigen Leitstrahl ein Perpendikel fällt und die Strecke von dem Fusspunkte bis zum zugehörigen Brennpunkte bestimmt. Soll aber diese Differenz $= 2a$ sein, so kann man die Richtung des unendlich entfernten Punktes finden; man construirt über der Hypotenuse $AB = 2c$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete $= 2a$ ist und die Richtung dieser Kathete gibt die gesuchte Richtung des unendlich entfernten Punktes der Hyperbel. Da vier Dreiecke möglich sind, von denen je zwei dieselbe Richtung der angegebenen Kathete haben, so können wir durch den Mittelpunkt der Hyperbel zwei Gerade ziehen, deren unendlich entfernte Punkte auf der Curve liegen; diese Geraden, welchen sich die Hyperbel, gegen das Unendliche fortrückend, immer mehr anschmiegt, heissen die Asymptoten der Hyperbel. Die Asymptoten theilen die Ebene in vier Winkelräume; nur in den beiden, welche die Brennpunkte enthalten, liegen Punkte der Hyperbel; in die beiden übrigen können wir

Fig. 26.



unter Andern eine der gegebenen conjugirte Hyperbel verzeichnen, welche dieselben Asymptoten und die gleiche Brenndistanz [Abstand der Brennpunkte] hat.

Fällt man bei der Hyperbel mit der Brenndistanz $2c$ und der grossen Axe $2a$ in einem der beiden Scheitel ein Perpendikel auf AB und bezeichnet dessen Länge bis zum Durchschnitt mit der einen Asymptote mit b, so kann man in Analogie zur Ellipse $2b$ den Werth der Nebenaxe der Hyperbel nennen. Man hat dann die Relation $a^2 + b^2 = c^2$, woraus folgt, wenn man c die Excentrizität der Hyperbel heisst, dass die Excentrizität grösser als jede der Halbaxen ist.

Hält man die Brennpunkte A und B der Hyperbel fest, und lässt die grosse Axe sich verändern, so kann diese zunächst $= 0$ sein, in welchem Falle die Hyperbel nichts weiter ist, als die zweite Symmetrie- oder die Nebenaxe, für welche in der That $x - y = 0$ ist. Dieselbe muss man doppelt zählen, weil in ihr beide Zweige der Hyperbel sich vereinigen. Nimmt nun die grosse Axe zu, so erhält man vorderhand Hyperbeln, welche sich in stumpfen Asymptotenwinkeln befinden, bis $a = b = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot c$ geworden, in welchem Falle der Asymptotenwinkel ein rechter ist. [Die Hyperbel heisst dann gleichseitig und entspricht in mancher Beziehung dem Kreise.] Nimmt die grosse Axe noch mehr zu, so wird der Asymptotenwinkel spitz, bis schliesslich für $a = c$ die Hyperbel sich auf die Hauptaxe reduzirt.

Lässt man die Hyperbel derart sich verändern, dass die Asymptoten fest bleiben und die Brennpunkte sich stets in denselben beiden Asymptotenwinkeln befinden, so bleibt das Verhältniss $\frac{b}{a}$ constant, und die sämmtlichen Hyperbeln sind ähnlich. Unter ihnen ist diejenige zu beachten, deren Excentrizität $c = 0$ ist, und die einfach aus den Asymptoten besteht.

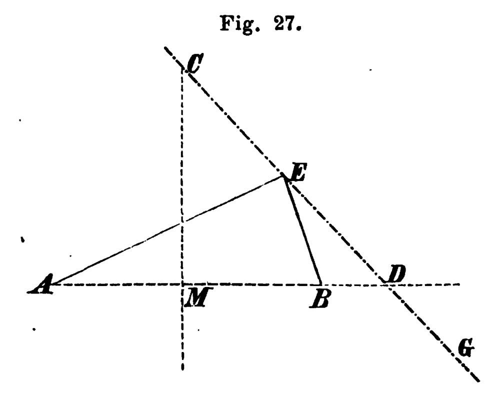
Es sollen nun die Scheitel oder Endpunkte der grossen Axe fest bleiben. Die Brennpunkte lassen wir zuerst in die Scheitel selbst hineinfallen; die zugehörige Hyperbel besteht dann aus der doppelt gelegten Hauptaxe, und zwar aus den Stücken, welche von den Scheiteln nach rechts und nach links ins Unendliche sich erstrecken. Wenn nun auf diesen die Brennpunkte sich immer weiter vom Mittelpunkte M entfernen, so öffnet sich die

Hyperbel mehr und mehr, und schliesslich, wenn die Brennpunkte ins Unendliche fallen, wird die Hyperbel zu zwei parallelen Geraden [durch die Scheitel], welche senkrecht auf der Hauptaxe stehen.

Als spezielle Fälle der Hyperbel muss man also bemerken: 1) die gleichseitige Hyperbel, 2) zwei sich schneidende Geraden, 3) zwei parallele Geraden, 4) eine Gerade, welche man sich als doppelt gelegt vorstellt.

In ähnlicher Weise, wie diess für die Ellipse geschehen ist, kann man auch für die Hyperbel nachweisen, dass sie von einer Geraden G nie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. Das Wesentliche dieses Beweises liegt darin, dass man von der möglichen Zeichenverschiedenheit der Differenz $AE - EB$, wo E einen Punkt der Geraden G bedeutet, absieht. Schneidet

Fig. 27.



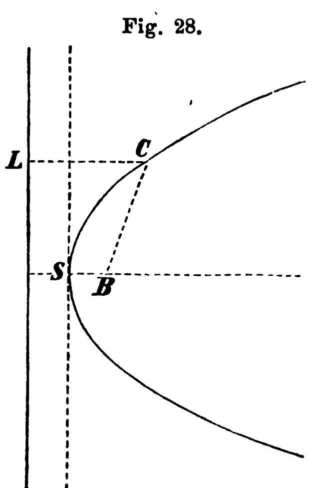
G die Hauptaxe ausserhalb der Strecke AB, so hat diese Differenz ein Minimum $= 0$, welches für den Schnitt C von G mit der Nebenaxe der Hyperbel eintritt, und ein Maximum $= 2c$ für den Punkt D von G auf der Hauptaxe. Stellt man sich jetzt die Gerade als im Unendlichen geschlossen vor [wir haben schon in § 5 gesagt, dass man auf einer Geraden nur einen unendlich entfernten Punkt annimmt], so wird die Differenz $AE - EB$, wenn E vom Punkte C in der Richtung nach dem Maximum sich bewegt, stetig wachsen, bis E den Punkt D erreicht, und zwar auf dieser Strecke den Werth $2a$ nur einmal annehmen. Geht man nun von D weiter, so nimmt die betrachtete Differenz stetig ab, bis man durch das Unendliche hindurch wieder zu dem

Punkte C gelangt; auf dieser Strecke, welche aus zwei in's Unendliche reichenden Stücken besteht, kann also $AE - EB$ den verlangten Werth auch nur einmal erreichen, so dass also zwei Schnittpunkte von G mit der Hyperbel vorhanden sind, aber ausser ihnen kein anderer mehr. Im Falle G zwischen den Brennpunkten durchgeht, wird die Betrachtung durchaus analog geführt, nur ist dann das Maximum von $AE - EB$ kleiner als $2c$.

Zur Vervollständigung des Bildes, das diese Auseinandersetzungen von der Hyperbel geben, sei schliesslich noch einer mechanischen Construction derselben erwähnt. In dem einen Brennpunkte A befestige man ein um ihn drehbares Lineal L. Ein Faden von passender Länge ist in dem andern Brennpunkte B und in einem Punkte D des Lineals befestigt. Dreht man nun L um A, und spannt zugleich mit dem Stifte C den Faden fortwährend an L, so beschreibt C den Bogen einer Hyperbel, deren Brennpunkte A und B sind. In der That ist $AC + CD$ constant, ebenso $BC + CD$, also auch die Differenz dieser beiden Summen $AC - CB$.

Obwohl mit Ellipse und Hyperbel aufs Innigste zusammenhängend, kann die Parabel, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, doch nicht vermittelst zweier Brennpunkte dargestellt werden; sie gehört also nicht zu denjenigen geometrischen Orten, welche im Vorhergehenden behandelt worden sind. Wir geben folgende Definition dieser Curve: der geometrische Ort eines Punktes C, dessen senkrechter Abstand von einer festen Geraden L [der Leitlinie] gleich ist seinem Abstande von einem festen Punkte B [dem Brennpunkte], heisst Parabel.

Fig. 28.



Die Curve liegt ihrer ganzen Ausdehnung nach mit dem Brennpunkte auf derselben Seite der Leitlinie, und hat das Perpendikel von B aus auf L zur Symmetrieaxe. Dieses Perpendikel heisst die Axe der Parabel; auf ihr befindet sich in gleichem Ab-

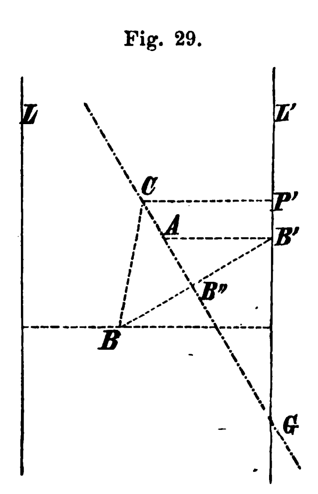
stande von L und von B ein Punkt S der Curve, welcher der Scheitel der Parabel heisst; von dem Scheitel aus erstreckt sich dieselbe sowohl über als unter der Axe nach derselben Richtung hin in's Unendliche. Die Tangente im Scheitel, welche in den spätern Entwicklungen eine grosse Rolle spielt, wird die Scheiteltangente der Parabel genannt. Was die Parabel in Bezug auf ihre Form wesentlich von Ellipse sowohl als von Hyperbel unterscheidet, ist, dass sie nur einen Brennpunkt, nur eine Axe, und auf dieser nur einen Scheitel hat. Zur Vervollständigung der Anschauung dient die folgende mechanische Construction der Parabel: Ein Lineal von der Länge DE gleitet mit dem einen Ende D auf der Leitlinie L derart, dass es zu derselben stets senkrecht bleibt. Ein Faden von der Länge DE, dessen Enden in E und B befestigt sind, bleibt während der Bewegung stets mit dem Stifte C straff an das Lineal gespannt und beschreibt ein Stück der Parabel.

Die Gestalt der Parabel ist einzig abhängig von der Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie; man kann leicht zeigen, dass alle Parabeln ähnlich sind. Hält man die Leitlinie und die Axe der Parabel fest, während der Brennpunkt auf der letztern sich bewegt, so wird die Parabel flacher [schmaler] oder erweiterter erscheinen, je nachdem der Brennpunkt näher an oder ferner von der Leitlinie sich befindet; liegt er auf der Leitlinie selbst, so reduzirt sich die Parabel auf die doppelt gelegte Axe. Man kann die Veränderung der Parabel auch so vor sich gehen lassen, dass man die Axe und zwei zu ihr symmetrisch gelegene Punkte der Parabel unverändert beibehält, während der Scheitel sich auf der Axe verschiebt. Liegt der Scheitel mit den beiden festen Parabelpunkten auf derselben Geraden, so artet die Parabel in diese Gerade selbst aus [die aber nicht doppelt zu zählen ist, sondern ähnlich aufgefasst wird wie die Gerade, welche man als Kreis mit unendlich grossem Radius betrachtet]; rückt der Scheitel in's Unendliche, so zerfällt die Curve in zwei zur Axe parallele Geraden, so dass also die Parabel als spezielle Fälle zulässt: 1) eine Gerade, 2) eine doppelt gelegte Geradei 3) zwei parallele Geraden.

Dass die Parabel von einer Geraden G in nie mehr als zwe, Punkten geschnitten werden kann, wird wie folgt gezeigt: Sei L die Leitlinie, B der Brennpunkt einer Parabel, G eine beliebige

Gerade, dann fälle man von B auf G ein Perpendikel, dessen Fusspunkt B'' sei, und verlängere dasselbe um sich selbst nach B'. Zieht man nun durch B' eine senkrechte L' auf die Axe, und eine Parallele $B'A$ zur Axe, welche auf G den Punkt A ergibt, so wird für einen Punkt C auf G, welcher von A aus nach einer der beiden Seiten der Geraden sich bewegt, die stets positive Differenz $CB - CP'$ [wo P' den Fusspunkt des von C auf L' gefällten Perpendikels bezeichnet] stetig zunehmen. Liegt also L' mit B auf derselben Seite von L, so wird diese Differenz nach jeder Seite von A aus auf G nur einmal gleich dem Abstande der Geraden L und L', d. h. in diesem Falle gibt es auf der Geraden G nur zwei Punkte der Parabel. Wenn aber L' auf der andern Seite von L liegt, so schneidet G die Parabel gar nicht.

Fig. 29.



Ellipse, Parabel und Hyperbel mit den zugehörigen speziellen Fällen zusammengenommen, heissen, weil eine Gerade keines dieser Gebilde in mehr als zwei Punkten schneiden kann: Curven zweiten Grades. Einer andern Eigenschaft wegen, die späterhin ausführlich erörtert werden soll, werden sie auch unter dem Namen Kegelschnitte zusammengefasst, dessen wir uns von nun an bedienen wollen.

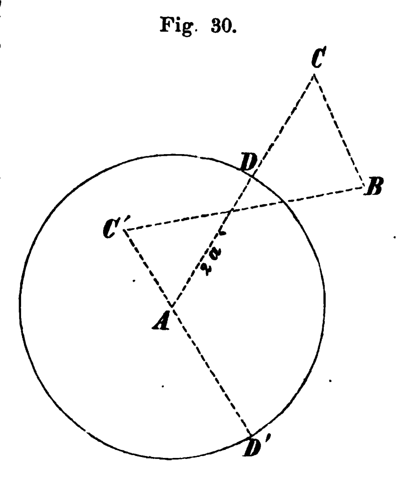
§ 9. Gemeinsamer Ursprung der Kegelschnitte.

Die Lehre vom geometrischen Orte ergibt ausser den bereits benutzten Definitionen, welche die fundamentalen sind, noch andre, die vor ihnen den Vortheil haben, dass sie die Kegelschnitte gleichzeitig bestimmen. Von besonderem Interesse ist die nachfolgende: Der geometrische Ort des Punktes C, welcher gleichweit absteht von einem Punkte B und von einem Kreise A, ist ein Kegelschnitt. Hierbei ist der Abstand des Punktes vom Kreise vorderhand gemessen auf dem durch ihn gehenden Durchmesser, und zwar als gleich angenommen mit dem Abstande des Punktes von dem ihm nähern Endpunkte des Durchmessers.

Liegt der Punkt B innerhalb des Kreises A, so dass also $AB = 2c$ kleiner ist als der Radius des Kreises $AD = 2a$, so hat man, wenn AD der durch C gehende Radius ist: $AC + CD = 2a$. Aber nach der gestellten Bedingung ist $CD = CB$, also $AC + CB = 2a$, d. h. der Punkt C bewegt sich auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B, deren grosse Axe gleich dem Radius des Kreises A und deren Brenndistanz gleich dem Abstande $2c$ des festen Punktes B von dem Mittelpunkte A des Kreises ist. Die Ellipse liegt ganz innerhalb des Kreises; wenn B mit A zusammenfällt, so wird sie zu einem Kreise vom Radius a, der dem gegebenen conzentrisch ist. Liegt B auf dem Kreise selbst, so reduzirt sich die Ellipse auf den doppelt gelegten Radius AB.

Nehmen wir den Punkt B ausserhalb des Kreises an, dann erhalten wir für einen Punkt C, der ebenfalls ausserhalb des Kreises liegt: $AC - CD = 2a$, wo D der Schnittpunkt der Geraden AC mit dem Kreise A und $2a$ der Radius dieses Kreises ist. Da aber $CD = CB$ sein soll, so erhalten wir $AC - CB = 2a$, d. h. der Ort von C ist der den Brennpunkt B umschliessende Zweig der Hyperbel mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$. Um die Bedeutung des zweiten, A umschliessenden Zweiges der Hyperbel zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt C' desselben, ziehe die Gerade $C'A$ und verlängere sie über A hinaus, bis sie den Kreis in einem Punkte D' schneidet. Da C' auf dem zweiten Zweige der Hyperbel liegt, so ist für ihn: $BC' - C'A = 2a$, also $BC' = C'A + 2a = C'A + AD' = C'D'$. Wir haben also in diesem Falle nicht den vorhin definirten Abstand des Punktes C' vom Kreise gleich dem Abstand des Punktes C' von B, sondern an Stelle des ersten tritt ein Werth, der ihn entweder zu einem Durchmesser ergänzt, oder der um einen Durchmesser grösser ist, je nachdem C' innerhalb oder ausserhalb des Kreises A liegt. Der Grund dieser Erscheinung liegt im Folgenden: Der Abstand eines Punktes

Fig. 30.



von einer Linie ist an sich genommen etwas Unbestimmtes, da man den gegebenen Punkt mit jedem beliebigen Punkte der Linie zusammennehmen und ihre Entfernung als den gesuchten Abstand bezeichnen kann. Man wählt nun unter allen diesen Abständen diejenigen aus, welche entweder ein Maximum oder ein Minimum sind; diese stehen, wie leicht zu zeigen ist, in ihren Fusspunkten auf der Linie senkrecht. Bei der Geraden tritt bekanntlich nur ein Minimum ein, beim Kreise aber sowohl ein Maximum als ein Minimum, andere Linien ergeben sogar mehrere Maxima und Minima, und jedes derselben kann im engern Sinne als Abstand des Punktes von der Linie aufgefasst werden. Wir haben desshalb den vollständigeren Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes C, der gleichen Abstand von einem festen Punkte B und einem Kreise A hat, ist ein Kegelschnitt und zwar eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem B innerhalb oder ausserhalb des Kreises A liegt.

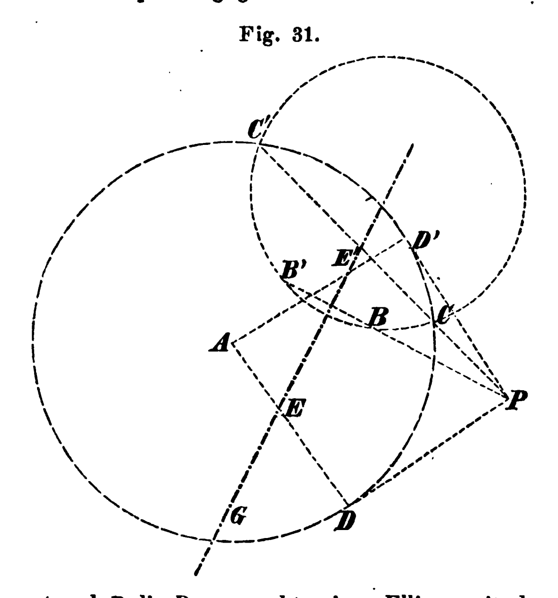
Um zu zeigen, dass dieser geometrische Ort auch die Parabel als speziellen Fall zulässt, halten wir fest: 1) den Punkt B, 2) eine durch B gehende Gerade, auf welcher sich der Mittelpunkt des Kreises bewege, und 3) einen auf dieser Geraden liegenden Punkt L, durch welchen der Kreis fortwährend gehen soll. Wenn nun A von L aus sich bewegt, und zwar von B sich entfernend, so erhält man eine Schaar von Hyperbeln, von denen jede folgende flacher ist, als die vorhergehende, bis schliesslich A in's Unendliche rückt, und der Kreis zur Geraden durch L senkrecht auf die Gerade der Mittelpunkte wird. Die Hyperbel ist dann zur Parabel geworden. Rückt A nun weiter, so kommt es auf der Seite von B [von L aus gesehen] wieder zum Vorschein, und der Kegelschnitt wird zur Ellipse. In dieser Weise ist also die Parabel als Uebergang der Hyperbel zur Ellipse, und als spezieller Fall beider Arten von Kegelschnitten dargestellt. Es folgt daraus, dass auch die Parabel zwei Brennpunkte hat, von denen einer aber in unendlicher Entfernung liegt, ebenso hat sie einen unendlich entfernten Mittelpunkt, einen unendlich entfernten Scheitel der grossen Axe, und eine unendlich entfernte Nebenaxe.

Durchaus identisch mit der so eben erörterten Definition ist der Satz: der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der stets durch einen festen Punkt B geht und einen gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$ berührt, ist

ein Kegelschnitt, welcher A und B zu Brennpunkten und $2a$ zur grossen Axe hat. Kreis und Punkt bestimmen den Kegelschnitt vollständig, und umgekehrt kann man einen gegebenen Kegelschnitt, der durch seine grosse Axe $2a$ und seine Brennpunkte A und B bestimmt ist, stets in einen derartigen geometrischen Ort verwandeln. Man schlage um A als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $2a$, dann ist der Kegelschnitt identisch mit dem geometrischen Orte derjenigen Punkte, welche gleichweit von diesem Kreise und dem zweiten Brennpunkte B abstehen. Die Fundamentaldefinition der Parabel fügt sich aber sofort in diese allgemeinere ein, sobald man die Leitlinie der Parabel als Kreis von unendlich grossem Radius auffasst.

Man ist durch diese Art der Anschauung nun in den Stand gesetzt, mit Hülfe von früher angegebenen Constructionen den Durchschnitt einer beliebigen Geraden zu construiren mit einer Ellipse oder Hyperbel, sofern man von derselben die Brennpunkte und die grosse Axe kennt, oder mit einer Parabel, von welcher Leitlinie und Brennpunkt gegeben sind.

Fig. 31.



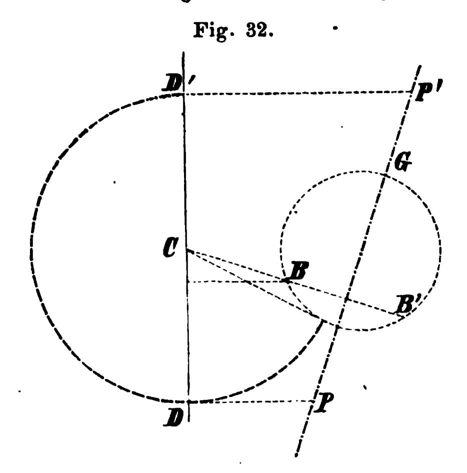
Seien A und B die Brennpunkte einer Ellipse mit der grossen Axe $2a$, ferner sei G eine beliebige Gerade, deren Durchschnitt mit der Ellipse bestimmt werden soll. Zu diesem Zwecke schlage

man um A als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius $2a$, dann ist die Aufgabe zurückgeführt auf die andere: einen Kreis zu finden, der durch B geht, den Kreis A berührt und seinen Mittelpunkt auf G liegen hat. Die Gerade G ist, da sie den Mittelpnnkt des gesuchten Kreises enthält, für denselben eine Symmetrieaxe; fällt man also von B aus auf G ein Perpendikel und verlängert dasselbe über G hinaus um sich selbst nach B', so ist B' ebenfalls ein Punkt des gesuchten Kreises. Wir haben also nur noch einen Kreis zu construiren, welcher durch die zwei Punkte B und B' geht und einen gegebenen Kreis A berührt. Diese Aufgabe, welche je nach der Lage von B und B' zum Kreise A zwei, eine oder keine Lösung zulässt, ist bereits in § 2 wie folgt behandelt worden: Man lege durch BB' einen beliebigen Kreis, der den Kreis A in den Punkten C und C' treffe; von dem Durchschnitt P der Geraden CC' und BB' lege man die Tangenten an den Kreis A, dann sind deren Berührungspunkte D und D' zugleich die Berührungspunkte der gesuchten Kreise. Die Mittelpunkte derselben, welche die gesuchten Ellipsenpunkte sind, findet man, indem man jeden der Berührungspunkte D und D' mit dem Mittelpunkte A durch eine Gerade verbindet und deren Durchschnitte E und E' mit G bestimmt. In dieser Construction erblickt man einen neuen Beweis des Satzes, dass eine Ellipse von einer Geraden nie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. — Um den Durchschnitt einer Geraden mit einer Hyperbel zu bestimmen, verfährt man durchaus analog.

Die Aufgabe, den Durchschnitt einer beliebigen Geraden G mit einer Parabel zu bestimmen, deren Leitlinie L und deren Brennpunkt B gegeben sind, lässt sich zurückführen auf die Aufgabe: durch einen Punkt B einen Kreis zu legen, der eine Gerade L berührt, und seinen Mittelpunkt auf einer andern Geraden G liegen hat. Fällt man jetzt von B aus ein Perpendikel auf G und verlängert dasselbe um sich selbst nach B', so ist noch nöthig, einen Kreis durch B und B' zu legen, der L berührt. Nach § 1 lässt diese Aufgabe je nach der Lage von B und B' zu L zwei, eine, oder keine Lösung zu, und wird wie folgt gelöst: Durch B und B' lege man einen willkürlichen Kreis, an den man von dem Durchschnittspunkte C der Geraden L und BB' die Tangenten zieht; mit der Länge dieser Tangenten schlage man um C einen Kreis, welcher nun L in den Berührungs-

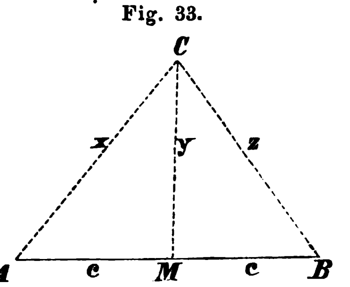
punkten D und D' der gesuchten Kreise trifft. Ihre Mittelpunkte findet man, indem man die Durchschnitte P und P' der in D und D' auf L errichteten Perpendikel mit G bestimmt; diese Punkte P und P' sind die gesuchten Parabelpunkte.

Fig. 32.



Aus spätern Betrachtungen folgt die Richtigkeit der nachfolgenden gemeinsamen Definition der Kegelschnitte: Der geometrische Ort desjenigen Punktes C, dessen Abstand p von einem festen Punkte B zu seinem Abstand q von einer festen Geraden L ein bestimmtes Verhältniss $\frac{p}{q} = \lambda$ hat, ist ein Kegelschnitt, und zwar für $\lambda < 1$ eine Ellipse, für $\lambda = 1$ eine Parabel, und für $\lambda > 1$ eine Hyperbel.

Fig. 33.



Eine Definition, welche gleichzeitig Ellipse und Hyperbel umfasst, ist diese: Es seien in einer Geraden drei Punkte, A, M, B so gegeben, dass M die Mitte der Strecke $AB = 2c$ ist. Werden nun die Abstände eines Punktes C von A, M, B mit x, y, z bezeichnet, so ist der Ort eines Punktes C, für welchen die Gl. gilt: $xy \pm y^2 = d^2$, eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem das obere oder das untere Vorzeichen genommen wird. Man hat nämlich nach einem elementaren Satze $x^2 + z^2 = 2c^2 + 2y^2$, und aus der Bedingungsgl.



Die

Kegelschnitte in spezieller Behandlungsweise.

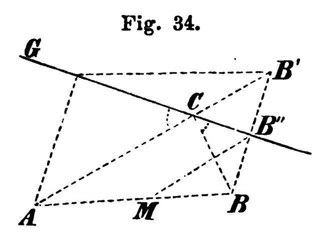
Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

§ 10. Die Ellipse als Tangentengebilde.

Hat eine Gerade G mit der Ellipse, [mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$] nur einen Punkt C gemein, so heisst dieselbe die Tangente der Ellipse im Punkte C, und der Punkt C heisst ihr Berührungspunkt. Alle Punkte der Tangente, mit Ausnahme des Punktes C, liegen ausserhalb der Ellipse, und da für jeden Punkt ausserhalb der Ellipse $AD + DB > 2a$ ist, so hat der Berührungspunkt C der Tangente die Eigenschaft, dass er von allen Punkten der Geraden G das Minimum der Summe der Abstände von A und B bestimmt. Betrachten wir die Punkte A und B und die Gerade G [welche die Gerade AB ausserhalb der Strecke AB schneidet], so haben wir den Punkt C auf G so zu bestimmen, dass $AC + CB$ ein Minimum wird.

Fig. 34.



Zu dem Ende fällen wir von B das Perpendikel BB'' auf G und verlängern dasselbe um sich selbst nach B'. [Dieser Punkt B' soll künftighin der Gegenpunkt von B in Bezug auf G genannt werden.] Zieht man jetzt die Gerade AB', so schnei-[illegible]t diese auf G den gesuchten Punkt [illegible]. Man hat in der That, da $AC + CB = AC + CB'$ ist, [illegible]n beliebigen Punkt D auf G: $AD + DB' > AC + CB$. [illegible] $= B''CB'$, und aus der Congruenz der

$\mp 2xz = \mp 2d^2 + 2y^2$; durch Subtraction folgt: $(x \pm z)^2 = 2c^2 \pm 2d^2$ und $x \pm z = \sqrt{2(c^2 \pm d^2)}$. Das obere Zeichen gibt also in der That eine Ellipse, das untere eine Hyperbel. Interessant ist der spezielle Fall: $xz = y^2$, welchem eine gleichseitige Hyperbel entspricht.

Bevor wir uns nun zu einer speziellen Behandlung der Kegelschnitte wenden, stellen wir die verschiedenen Gebilde zusammen, welche diesen gemeinsamen Namen führen. Wir haben:

Die Ellipse und ihre speciellen Fälle:
der Kreis und der Punkt.
Die Hyperbel und ihre speciellen Fälle:
die gleichseitige Hyperbel und zwei sich schneidende Gerade.
Als Uebergang von Ellipse zu Hyperbel
die Parabel und die speziellen Fälle:
zwei parallele Gerade,
eine doppelt gelegte Gerade,
eine Gerade.

Die

Kegelschnitte in spezieller Behandlungsweise.

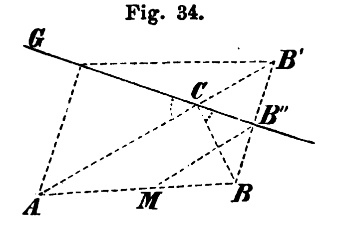
Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

§ 10. Die Ellipse als Tangentengebilde.

Hat eine Gerade G mit der Ellipse, [mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$] nur einen Punkt C gemein, so heisst dieselbe die Tangente der Ellipse im Punkte C, und der Punkt C heisst ihr Berührungspunkt. Alle Punkte der Tangente, mit Ausnahme des Punktes C, liegen ausserhalb der Ellipse, und da für jeden Punkt ausserhalb der Ellipse $AD + DB > 2a$ ist, so hat der Berührungspunkt C der Tangente die Eigenschaft, dass er von allen Punkten der Geraden G das Minimum der Summe der Abstände von A und B bestimmt. Betrachten wir die Punkte A und B und die Gerade G [welche die Gerade AB ausserhalb der Strecke AB schneidet], so haben wir den Punkt C auf G so zu bestimmen, dass $AC + CB$ ein Minimum wird.

Fig. 34.



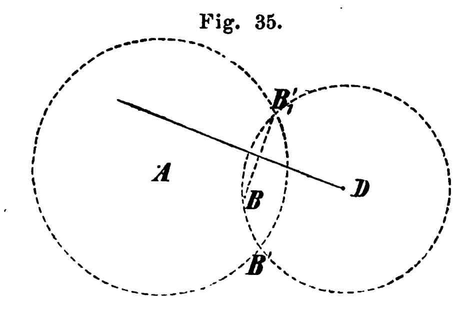
Zu dem Ende fällen wir von B das Perpendikel BB'' auf G und verlängern dasselbe um sich selbst nach B'. [Dieser Punkt B' soll künftighin der Gegenpunkt von B in Bezug auf G genannt werden.] Zieht man jetzt die Gerade AB', so schneidet diese auf G den gesuchten Punkt C aus. Man hat in der That, da $AC + CB = AC + CB'$ ist, für jeden beliebigen Punkt D auf G: $AD + DB' > AC + CB$. Es ist aber $\sphericalangle ACD = B''CB'$, und aus der Congruenz der

Dreiecke BCB'' und $B'CB''$ folgt ferner $\sphericalangle\, ACD = BCB''$, d. h. AC und CB bilden mit G gleiche Winkel. Auf die Ellipse angewandt gibt dies den Satz: die Tangente G in einem Punkte C der Ellipse bildet mit den Leitstrahlen AC und CB gleiche Winkel. Da $B'C = CB$ ist, so folgt $AC + CB' = AB' = 2a$, oder: bestimmt man die Gegenpunkte B' eines Brennpunktes B der Ellipse in Bezug auf alle Tangenten derselben, so liegen diese Punkte B' auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$. —

Wenn M der Mittelpunkt der Ellipse ist, so hat man $AM = MB$, ebenso ist $BB'' = B''B'$, also sind die Dreiecke $AB'B$ und $MB''B$ ähnlich und ihre Seiten verhalten sich wie $2:1$; daraus folgt: $AB' = 2a = 2MB''$ oder $MB'' = a$, d. h.: Fällt man von einem Brennpunkte aus Perpendikel auf alle Tangenten der Ellipse, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte M und dem Radius a, oder, da, was für den einen Brennpunkt gilt, sofort auch für den andern bewiesen werden kann: Fällt man von den Brennpunkten aus Perpendikel auf alle Tangenten einer Ellipse, so liegen deren Fusspunkte auf dem Kreise, welcher über der grossen Axe als Durchmesser errichtet ist.

Vermittelst dieser Sätze kann man die Aufgabe lösen: Von einem gegebenen Punkte D aus die Tangenten an eine Ellipse

Fig. 35.

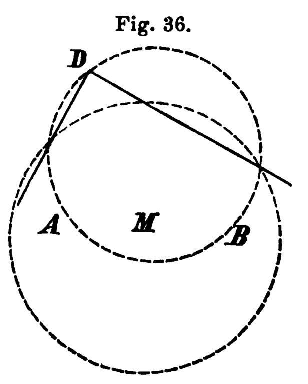


zu ziehen, von welcher man die Brennpunkte A und B und die grosse Axe $2a$ kennt. Sei B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf die gesuchte Tangente, so ist $DB = DB'$; um also B' zu finden, schlage man um A einen Kreis mit dem Radius $2a$ und um D einen Kreis mit dem Radius DB, so treffen sich diese beiden Kreise in zwei Punkten B' und B'_1, von denen jeder als

der Gegenpunkt von B in Bezug auf eine durch D gehende Tangente angesehen werden kann. Um diejenige Tangente, die z. B. B'_1 entspricht, zu finden, fälle man von D aus das Perpendikel auf BB'_1; der Berührungspunkt C_1 dieser Tangente ist ihr Durchschnitt mit AB'_1.

Eine zweite Lösung ist die folgende: Der noch unbekannte Fusspunkt C des von B aus auf die gesuchte Tangente gefällten Perpendikels liegt nothwendigerweise auf dem Kreise, welcher über der grossen Axe als Durchmesser errichtet worden ist. Da der Winkel DCB ein rechter ist, so muss aber C auch auf dem Kreise liegen, der über DB als Durchmesser errichtet ist. Die beiden genannten Kreise schneiden sich nun im Allgemeinen in zwei Punkten C und C' und sowohl DC als DC' ist eine durch D gehende Tangente an die gegebene Ellipse. Da aber zwei Kreise entweder zwei Punkte gemein haben [sich schneiden], oder einen [sich berühren], oder gar keinen [sich nicht schneiden], so kann man von einem Punkte aus zwei, eine, oder gar keine Tangente an eine Ellipse ziehen, und zwar wie leicht einzusehen ist, je nachdem der Punkt ausserhalb, auf, oder innerhalb der Ellipse liegt. — Später soll gezeigt werden, dass man auch an die Hyperbel und an die Parabel von einem Punkte aus nie mehr als zwei Tangenten ziehen kann; die Kegelschnitte heissen desshalb auch Curven zweiter Klasse.

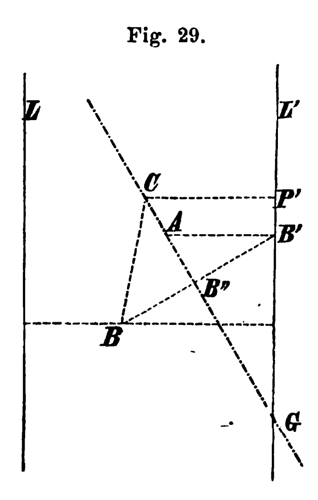
Fig. 36.



Die Aufgabe, Tangenten an die Ellipse zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, lässt sich auf die eben gelöste zurückführen, indem man den Punkt D zum unendlich entfernten Punkt der gegebenen Geraden werden lässt. In diesem Falle artet der Kreis über dem Durchmesser DB in eine Gerade aus, welche durch B geht und senkrecht auf G steht. Da nun B innerhalb des Kreises liegt, welcher über der grossen Axe als Durchmesser errichtet ist, so schneidet diese senkrecht zu G gelegte Gerade den Kreis stets in zwei Punkten C und C', woraus folgt, dass zu jeder beliebigen Richtung zwei parallele Tangenten an die Ellipse gezogen werden können.

Gerade, dann fälle man von B auf G ein Perpendikel, dessen Fusspunkt B'' sei, und verlängere dasselbe um sich selbst nach B'. Zieht man nun durch B' eine senkrechte L' auf die Axe, und eine Parallele $B'A$ zur Axe, welche auf G den Punkt A ergibt, so wird für einen Punkt C auf G, welcher von A aus nach einer der beiden Seiten der Geraden sich bewegt, die stets positive Differenz $CB - CP'$ [wo P' den Fusspunkt des von C auf L' gefällten Perpendikels bezeichnet] stetig zunehmen. Liegt also L' mit B auf derselben Seite von L, so wird diese Differenz nach jeder Seite von A aus auf G nur einmal gleich dem Abstande der Geraden L und L', d. h. in diesem Falle gibt es auf der Geraden G nur zwei Punkte der Parabel. Wenn aber L' auf der andern Seite von L liegt, so schneidet G die Parabel gar nicht.

Fig. 29.



Ellipse, Parabel und Hyperbel mit den zugehörigen speziellen Fällen zusammengenommen, heissen, weil eine Gerade keines dieser Gebilde in mehr als zwei Punkten schneiden kann: Curven zweiten Grades. Einer andern Eigenschaft wegen, die späterhin ausführlich erörtert werden soll, werden sie auch unter dem Namen Kegelschnitte zusammengefasst, dessen wir uns von nun an bedienen wollen.

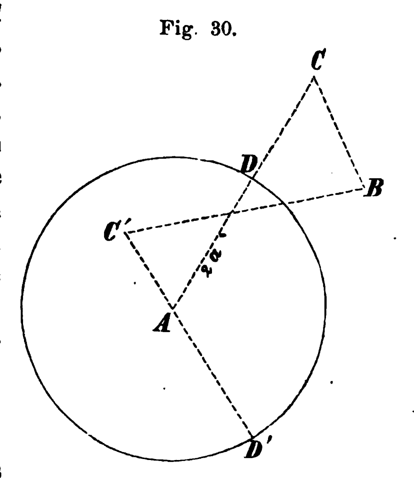
§ 9. Gemeinsamer Ursprung der Kegelschnitte.

Die Lehre vom geometrischen Orte ergibt ausser den bereits benutzten Definitionen, welche die fundamentalen sind, noch andre, die vor ihnen den Vortheil haben, dass sie die Kegelschnitte gleichzeitig bestimmen. Von besonderem Interesse ist die nachfolgende: Der geometrische Ort des Punktes C, welcher gleichweit absteht von einem Punkte B und von einem Kreise A, ist ein Kegelschnitt. Hierbei ist der Abstand des Punktes vom Kreise vorderhand gemessen auf dem durch ihn gehenden Durchmesser, und zwar als gleich angenommen mit dem Abstande des Punktes von dem ihm nähern Endpunkte des Durchmessers.

Liegt der Punkt B innerhalb des Kreises A, so dass also $AB = 2c$ kleiner ist als der Radius des Kreises $AD = 2a$, so hat man, wenn AD der durch C gehende Radius ist: $AC + CD = 2a$. Aber nach der gestellten Bedingung ist $CD = CB$, also $AC + CB = 2a$, d. h. der Punkt C bewegt sich auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B, deren grosse Axe gleich dem Radius des Kreises A und deren Brenndistanz gleich dem Abstande $2c$ des festen Punktes B von dem Mittelpunkte A des Kreises ist. Die Ellipse liegt ganz innerhalb des Kreises; wenn B mit A zusammenfällt, so wird sie zu einem Kreise vom Radius a, der dem gegebenen conzentrisch ist. Liegt B auf dem Kreise selbst, so reduzirt sich die Ellipse auf den doppelt gelegten Radius AB.

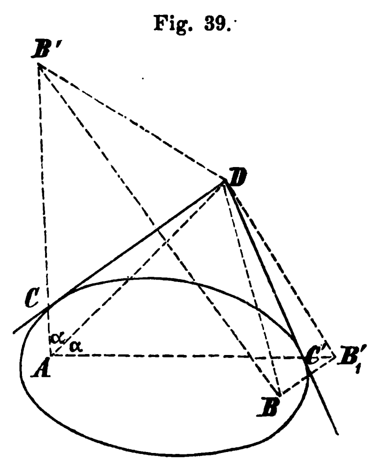
Nehmen wir den Punkt B ausserhalb des Kreises an, dann erhalten wir für einen Punkt C, der ebenfalls ausserhalb des Kreises liegt: $AC - CD = 2a$, wo D der Schnittpunkt der Geraden AC mit dem Kreise A und $2a$ der Radius dieses Kreises ist. Da aber $CD = CB$ sein soll, so erhalten wir $AC - CB = 2a$, d. h. der Ort von C ist der den Brennpunkt B umschliessende Zweig der Hyperbel mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$. Um die Bedeutung des zweiten, A umschliessenden Zweiges der Hyperbel zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt C' desselben, ziehe die Gerade $C'A$ und verlängere sie über A hinaus, bis sie den Kreis in einem Punkte D' schneidet. Da C' auf dem zweiten Zweige der Hyperbel liegt, so ist für ihn: $BC' - C'A = 2a$, also $BC' = C'A + 2a = C'A + AD' = C'D'$. Wir haben also in diesem Falle nicht den vorhin definirten Abstand des Punktes C' vom Kreise gleich dem Abstand des Punktes C' von B, sondern an Stelle des ersten tritt ein Werth, der ihn entweder zu einem Durchmesser ergänzt, oder der um einen Durchmesser grösser ist, je nachdem C' innerhalb oder ausserhalb des Kreises A liegt. Der Grund dieser Erscheinung liegt im Folgenden: Der Abstand eines Punktes

Fig. 30.



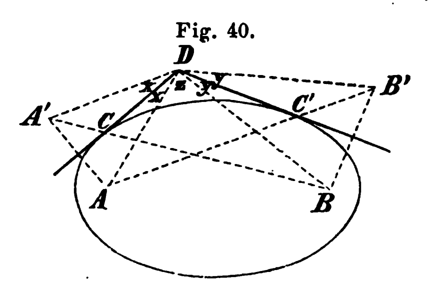
Tangenten der Ellipse, so wird der von ihnen gebildete Winkel durch denjenigen Strahl halbirt, welcher von dem nämlichen Brennpunkte aus nach ihrem Durchschnittspunkte geführt wird.

Fig. 39.



Wir betrachten wieder die beiden von D aus an die Ellipse gezogenen Tangenten DC und DC', dann den Gegenpunkt A' von A in Bezug auf DC und den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf DC'. Es ist nun $A'B = AB' = 2a$, $AD = A'D$

Fig. 40.

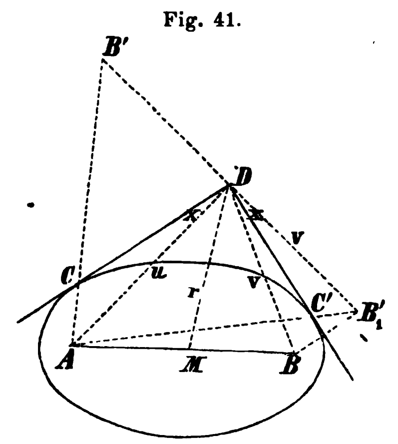


und $BD = B'D$, also sind die Dreiecke $A'DB$ und ADB' congruent und desshalb $\sphericalangle A'DB = ADB'$ oder $2x + z = 2y + z$ und $x = y$, d. h.: Zieht man von einem Punkte aus die beiden Tangenten an die Ellipse und die beiden Strahlen nach den Brennpunkten, so bilden diese Strahlen mit den Tangenten resp. gleiche Winkel.

Stehen die beiden Tangenten DC und DC' senkrecht auf einander, so ist, da nach dem eben bewiesenen Satze $\sphericalangle CDA = C'DB'_1$, Winkel $ADB = 90^0$. Bezeichnet man die beiden von

D nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen mit u und v, so ist $AD^2 + DB^2 = u^2 + v^2$, und da $DB = DB'_1$ ist, auch $AD^2 + DB'^2_1 = u^2 + v^2$. Aber das Dreieck ADB'_1 ist ein rechtwinkliges mit der Hypotenuse $AB' = 2a$, also hat man $u^2 + v^2 = 4a^2$. Sollen also die von einem Punkte D aus an die Ellipse gezogenen Tangenten rechtwinklig zu einander stehen, so muss D dem

Fig. 41.



geometrischen Orte der Punkte angehören, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten constant ist; dieser Ort ist nach § 7 ein Kreis mit dem Mittelpunkte M. Nach der dort gegebenen Formel findet man für den Radius dieses Kreises: $r = \sqrt{\frac{4a^2 - 2c^2}{2}} = \sqrt{2a^2 - c^2}$; führen wir nun die kleine Axe der Ellipse ein, vermittelst der Relation $a^2 = b^2 + c^2$, so findet man schliesslich $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Diese Grösse wird construirt, indem man einfach einen Scheitel der grossen Axe der Ellipse mit einem Scheitel der kleinen Axe verbindet. Man hat also den Satz: Bewegt sich ein rechter Winkel dergestalt, dass seine Schenkel stets eine gegebene Ellipse berühren, so durchläuft sein Scheitel eine bestimmte Kreislinie, welche mit der Ellipse conzentrisch ist, und deren Radius gleichen Werth hat mit der Geraden, die in der Ellipse zwei Scheitel der beiden Axen verbindet.

Wenn B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf CD ist, so hat man $\triangle ADB_1' \cong ADB'$ und da $\sphericalangle ADB_1'$ ein Rechter ist, so folgt, dass die Punkte B', D und B'_1 in einer Geraden liegen.

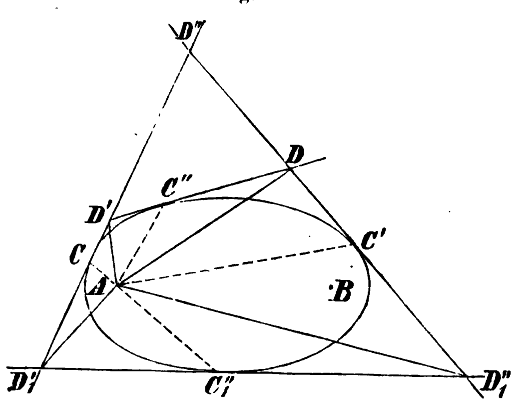
Der Fusspunkt des von A aus auf die Gerade $B'B_1'$ gefällten Perpendikels ist D, und dieser Punkt beschreibt, wenn $B'B_1'$ sich bewegt, wie bewiesen worden ist, einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Im vorigen § ist nun gezeigt, dass der Ort der Fusspunkte aller Perpendikel, welche man von einem Brennpunkte der Ellipse aus auf sämmtliche Tangenten derselben fällen kann, der Kreis über ihrer grossen Axe als Durchmesser ist. Dieser Satz gewährt eine Umkehrung, und wendet man dieselbe im vorliegenden Falle an, so erhält man das Resultat: die Gerade $B'B'_1$ ist in allen ihren Lagen Tangente an eine Ellipse, welche mit der gegebenen die gleichen Brennpunkte A und B hat [mit ihr confocal ist] und deren halbe grosse Axe $= \sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Beachtet man schliesslich, dass $AB' = AB_1' = 2a$, dass der Winkel $B'BB_1'$ ein Rechter [seine Schenkel stehen nämlich auf den Schenkeln des rechten Winkels CDC' senkrecht] und dass $B'D = DB_1'$ ist, so ergibt sich der Satz:

Wenn der Scheitel B eines rechten Winkels innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$ liegt, so schneiden seine Schenkel auf dem Kreise vier Punkte aus, deren Verbindungsgeraden Tangenten einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B sind; ist $AB = 2c$, und setzt man $a^2 - c^2 = b^2$, so ist die halbe grosse Axe dieser Ellipse $= \sqrt{a^2 + b^2}$. Dreht man also den rechten Winkel um B herum, so kann man beliebig viele Tangenten der Ellipse erzeugen. Die Mitten aller der genannten Verbindungsgeraden, welche die Tangenten ergeben, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt M die Mitte der Strecke AB ist. Als Corollar folgt hieraus der elementare Satz: Stehen die beiden Diagonalen eines Kreisviereckes senkrecht auf einander, so liegen die Mitten seiner Seiten in einem neuen Kreise.

Werden zwei beliebige Tangenten $D''D'C$ und $D''DC'$ der Ellipse mit den Berührungspunkten C und C' festgehalten, und man legt eine dritte Tangente $DD'C''$ mit dem Berührungspunkt C'', so ist nach dem ersten Satze dieses Paragraphen $\measuredangle\, CAD' = D'AC''$ und $\measuredangle\, C''AD = DAC'$, also $D'AD = \frac{1}{2}\, CAC'$. Wenn also die Tangente $DD'C''$ mit dem Berührungspunkt C'' auf dem Bogen CC' der Ellipse rollt, so bleibt der Winkel $D'AD$, unter welchem ihr zwischen den beiden festen Tangenten liegendes

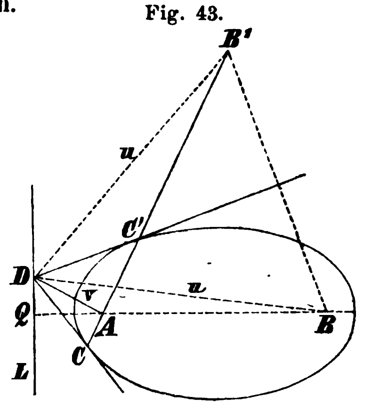
Stück gesehen wird, constant. Wenn aber der Berührungspunkt der beweglichen Tangente über einen der festen Berührungspunkte hinausgeht, so tritt an Stelle des Winkels $\frac{1}{2}CAC'$ sein Supplementwinkel $180^0 - \frac{1}{2}CAC'$. Hieraus folgt nun der Satz:

Fig. 42.



Zieht man von einem Brennpunkte der Ellipse aus Strahlen nach den Ecken eines ihr umschriebenen Viereckes, so bilden diese Strahlen vier Winkel, von denen, wenn das Viereck ein convexes (von einem Umlaufe) ist, je zwei auf gegenüberliegende Seiten sich stützende sich zu zwei Rechten ergänzen; ist das Viereck ein überschlagenes (von zwei Umläufen), so sind je zwei der genannten Winkel einander gleich.

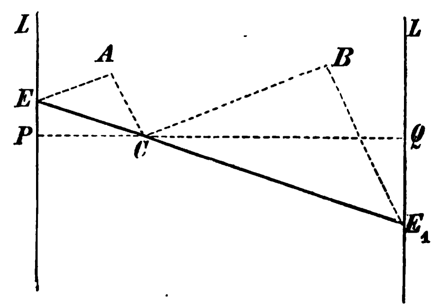
Fig. 43.



Aus dem Satze, dass die Strahlen von einem Brennpunkte aus nach den Berührungspunkten und nach dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten gleiche Winkel mit einander bilden, folgt der nachstehende: Sind DC und DC' zwei Tangenten, deren Berührungssehne CC' durch den Brennpunkt A geht, so steht DA senkrecht auf CC'. Construirt man jetzt den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf die Tangente DC', so ist das Dreieck DAB' ein rechtwinkliges, in welchem die Kathete $AB' = 2a$ und die

Hypotenuse $DB' = DB$ ist. Wenn man also DB mit u und DA mit v bezeichnet, so kann man die Gleichung $DB'^2 - DA^2 = AB'^2$ verwandeln in: $u^2 - v^2 = 4a^2$. Wie also auch die Berührungssehne CC' durch den Brennpunkt A gelegt werde, der Punkt D hat immer die Eigenschaft, dass die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten [den Brennpunkten B und A] constant ist. Nach § 7 ist also der Ort von D eine Gerade L, welche senkrecht auf AB steht. Sei Q der Durchschnitt von L mit AB, so ist auch $QB^2 - QA^2 = 4a^2$, und wie sich von selbst versteht $QB - QA = 2c$; daraus ergibt sich $QB + QA = \frac{2a^2}{c}$, $QB = \frac{a^2 + c^2}{c}$, $QA = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$ und $QM = \frac{a^2}{c}$. Die Gerade L heisst die Leitlinie der Ellipse in Bezug auf den Brennpunkt A; zu ihr symmetrisch [parallel im Abstande $\frac{2a^2}{c}$] liegt eine dem Brennpunkte B zugehörige Leitlinie L_1, die für diesen Brennpunkt ganz dieselbe Rolle spielt, wie L für A.

Fig. 44.

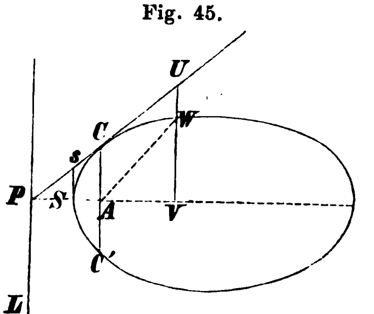


Sei EE_1 das Stück der Ellipsentangente in C, welches zwischen den beiden Leitlinien liegt, so ist $\sphericalangle\, EAC = E_1BC = 90^0$, ferner $\sphericalangle\, ECA = E_1CB$, also sind die beiden Dreiecke EAC und CBE_1 ähnlich, woraus folgt: $AC : CE = BC : CE_1$. Bezeichnet man mit PQ das zwischen den Leitlinien liegende Stück der durch C parallel zu AB gezogenen Geraden, so sind auch die Dreiecke EPC und E_1QC ähnlich, also ist $CP : CE = CQ : CE_1$, und unter Berücksichtigung der frühern Proportion: $AC : CP = BC : CQ$, oder $AC : BC = CP : CQ$, woraus sich ergibt: $AC + BC : AC = CP : CQ : CP$. In dieser Proportion ersetzen wir das erste und das dritte Glied durch ihre Werthe; es ist,

weil C auf der Ellipse sich befindet: $AC + CB = 2a$, und nach dem vorhin gefundenen Resultate $CP + CQ = PQ = \frac{2a^2}{c}$. Man erhält nun $\frac{CP}{AC} = \frac{c}{a}$ d. h. wenn sich ein Punkt C auf der Ellipse bewegt, so bleibt das Verhältniss der Abstände des Punktes von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie constant, was bereits in § 9 angedeutet worden ist.

Sei, abweichend von der vorigen Bezeichnung, P der Durchschnitt der Leitlinie L des Brennpunktes A mit der grossen Axe der Ellipse, so kann man von P aus zwei Tangenten an die Ellipse ziehen, deren Berührungssehne CC' durch A geht und auf PA senkrecht steht. Die Strecke CC' heisst Parameter der Ellipse; ihr Werth kann wie folgt gefunden werden. Der Abstand des Punktes C von L ist $= AP$, also hat man $CA : AP = c : a$, nach Früherem ist aber $AP = \frac{b^2}{c}$, also $CA = \frac{b^2}{a}$ und $CC' = \frac{2b^2}{a}$. Nun errichte man in S die Scheiteltangente Ss. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke PsS und PCA hat man dann $sS : PS = CA : AP$; da aber C und S zwei Punkte der Ellipse sind, so ist auch $SA : PS = CA : AP$, woraus man durch Vergleichung zieht: $sS = SA$. Ist überhaupt U ein Punkt der Tangente PC, ferner V der Fusspunkt des von U auf AB gefällten Perpendikels und W der Durchschnitt dieses Perpendikels mit der Ellipse, so ist $AW = UV$. Man hat nämlich $AW : VP = CA : AP$, weil C und W Ellipsenpunkte sind, und $UV : VP = CA : AP$ wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke PCA und PUV; diess gibt $AW : VP = UV : VP$ und $AW = UV$.

Fig. 45.

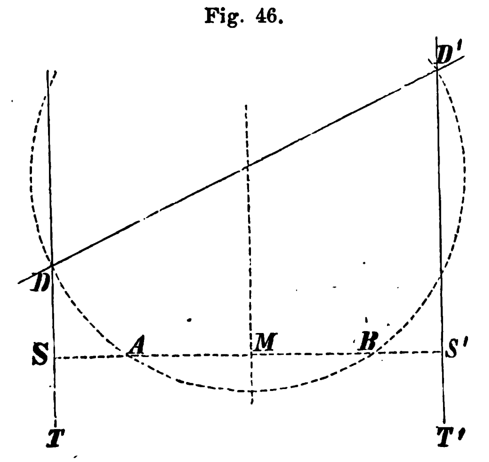


Wird die grosse Axe als Berührungssehne zweier Tangenten angenommen, so kann der Schnittpunkt dieser Tangenten, welche in den Scheiteln der grossen Axe berühren und auf dieser senkrecht stehen, sowohl auf der einen als auf der andern der beiden Leitlinien der Ellipse angenommen werden, da ja die Berührungssehne durch jeden der Brennpunkte geht. In der That sind die

beiden Tangenten und die Leitlinien parallel und desshalb können diese vier Geraden so angesehen werden, als ob sie einen und denselben unendlich entfernten Punkt gemein hätten.

Werden die Tangenten in den Scheiteln der grossen Axe mit T und T' bezeichnet, so schneidet eine beliebige Tangente der Ellipse zwischen T und T' ein Stück DD' aus, welches, wie eine unmittelbare Folgerung aus einem frühern Satze ergibt, von jedem der Brennpunkte aus unter rechtem Winkel gesehen wird. Die Punkte $DD'AB$ liegen also auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt von DD' mit der kleinen Axe ist. Man kann hieraus die folgende Construction der Ellipse aus ihren

Fig. 46.



Tangenten ableiten: Ausserhalb der Strecke AB, deren Mitte M ist, wähle man zwei Punkte S und S', so dass $SM = MS'$, und errichte in diesen die Perpendikel T und T' auf AB. Nun construirt man einen beliebigen, durch A und B gehenden Kreis, welcher T und T' in vier Punkten schneidet; verbindet man von den Durchschnittspunkten je zwei, deren Verbindungsgerade durch den Mittelpunkt des gezogenen Kreises geht, so sind diese Verbindungsgeraden Tangenten der Ellipse, welche A und B zu Brennpunkten und die Punkte S und S' zu Scheiteln der grossen Axe hat. Durch Veränderung des Kreises erhält man beliebig viele Tangenten dieser Ellipse.

Eine andere Construction der Ellipse aus ihren Tangenten gründet sich auf den Satz: Zieht man von einem Punkte D der

kleinen Axe aus zwei feste Tangenten DC und DC', so erscheint das Stück EE', welches eine bewegliche dritte Tangente zwischen denselben ausschneidet, von beiden Brennpunkten aus stets unter demselben Winkel. Der Satz ist evident für den Fall, dass EE' der grossen Axe parallel ist; damit ist er aber auch nach einem schon mehrfach benutzten Satze für alle übrigen Fälle bewiesen. Da nun die Punkte $ABEE'$ auf einem Kreise liegen, so erhält man folgende Construction der Ellipsentangenten: Man wähle eine begränzte Strecke AB, errichte in ihrer Mitte M ein Perpendikel auf sie und ziehe von einem Punkte D derselben zwei Geraden DC und DC', welche mit ihm gleiche Winkel bilden, aber so, dass die Gerade AB von ihnen ausserhalb der Strecke AB getroffen wird. Legt man nun durch A und B Kreise, welche die Geraden DC und DC' schneiden, so wird man auf jedem Kreise durch diese Geraden vier Punkte erhalten, von denen die nicht symmetrisch gelegenen durch ihre Verbindungsgeraden Tangenten einer bestimmten Ellipse ergeben. Dass auf diese Weise unendlich viele Ellipsentangenten construirt werden können, ist klar.

Fig. 47.

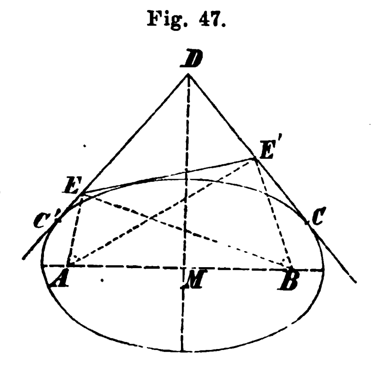
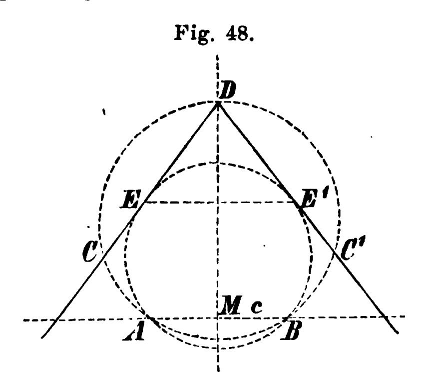


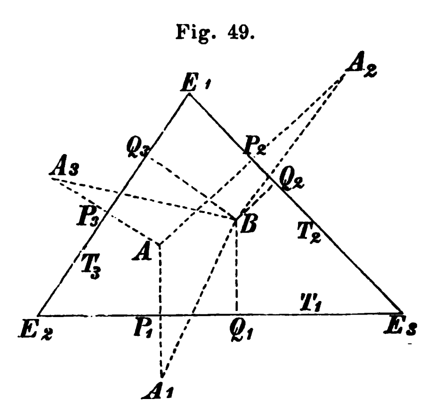
Fig. 48.



Der kleinste Kreis der Schaar AB, der noch Tangenten ergibt, ist derjenige, welcher die beiden Geraden DC und DC' berührt; es geschehe diess in E und E', so ist EE' die Tangente

in einem Scheitel der kleinen Axe der Ellipse. Die beiden festen, symmetrisch zu A und B gelegten Geraden sind ebenfalls Tangenten an die Ellipse und der Kreis, welcher sie erzeugt, ist derjenige durch die Punkte ABD; von den vier Schnittpunkten, die in diesem Falle zur Construction der Tangenten dienen, vereinigen sich zwei im Punkte D. Die Berührungspunkte dieser Tangenten sind ihre zweiten Schnittpunkte C und C' mit dem genannten Kreise. Man hat nämlich z. B. für den Punkt C' das Mass des Peripheriewinkels $BC'F = \frac{1}{2} DB$, wo unter DB der Kreisbogen $DC'B$ verstanden ist, ebenso $\sphericalangle AC'D = \frac{1}{2} AD$; da aber $AD = DB$, so folgt, dass die Leitstrahlen AC' und BC' mit der Tangente gleiche Winkel bilden, d. h. C' ist der Berührungspunkt. Diess gibt den Satz: Zieht man von einem Punkte D der kleinen Axe aus zwei Tangenten an die Ellipse, deren Berührungspunkte C und C' sein mögen, dann liegen die Punkte D, C und C' mit den Brennpunkten A und B in einem Kreise. Wenn F der Durchschnitt von DC' mit AB ist, so gilt nach § 1 die Relation $FE'^2 = FA . FB$ oder $FE'^2 = (FM + c)(FM - c) = FM^2 - c^2$. Zieht man also an die Ellipse eine beliebige Tangente, welche die grosse Axe in F und die Tangente in einem Scheitel der kleinen Axe in E' trifft, so ist $FM^2 - FE'^2 = c^2$.

Fig. 49.



Sind die Tangenten $T_1 T_2 T_3$ der Ellipse gegeben, so bilden dieselben ein der Ellipse umschriebenes Dreieck. Sucht man die Gegenpunkte $A_1 A_2 A_3$ von A in Bezug auf die drei Geraden $T_1 T_2 T_3$, so ist $BA_1 = BA_2 = BA_3 = 2a$, d. h. B ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher sich dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umschreiben

lässt. Kennt man also von einer Ellipse einen Brennpunkt und ein umschriebenes Dreieck [das den Brennpunkt einschliesst], so construire man die Gegenpunkte des gegebenen Brennpunktes in Bezug auf die Seiten des Dreiecks, dann ist der Mittelpunkt des Kreises, der diesem Dreieck der Gegenpunkte umschrieben werden kann, der zweite Brennpunkt der Ellipse, und der Radius dieses Kreises ihre grosse Axe. Die Berührungspunkte der Ellipse auf den drei gegebenen Dreiecksseiten liegen auf den Radien, welche nach den zugehörigen Gegenpunkten gezogen werden. Seien die Fusspunkte der von A auf $T_1 T_2 T_3$ gefällten Perpendikel resp. $P_1 P_2 P_3$ und die Fusspunkte der von B auf diese Tangenten gefällten Perpendikel resp. $Q_1 Q_2 Q_3$, so liegen diese sechs Punkte auf einem Kreise, welcher über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser beschrieben ist. Zugleich hat man $AP_1 \, . \, BQ_1 = AP_2 \, . \, BQ_2 = AP_3 \, . \, BQ_3 = b^2$. Wenn die Ecken des Dreiecks $T_1 T_2 T_3$ mit $E_1 E_2 E_3$ bezeichnet werden, so ist $E_1 A = E_1 A_2 = E_1 A_3$, also liegen $A A_2 A_3$ auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt E_1. Aehnliches wird für E_2 und E_3 gezeigt. Man kann auf Grund dieser Bemerkung die Punkte $A_1 A_2 A_3$ wie folgt bestimmen: Man lege durch A Kreise, welche E_1, E_2, E_3 zu Mittelpunkten haben; diese schneiden sich ausser in A in drei Punkten, welche die gesuchten sind. Da $E_1 A_2 = E_1 A_3$ und $B A_2 = B A_3$, so schneiden sich im Viereck $E_1 A A_2 A_3$ die Diagonalen rechtwinklig; dasselbe wird von den Vierecken $E_2 A A_3 A_1$ und $E_3 A A_1 A_2$ gezeigt. Fälle ich somit von $E_1 E_2 E_3$ Perpendikel resp. auf $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ und $A_1 A_2$, so schneiden sich dieselben in B. Es sind nun die Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ denjenigen von $A_1 A_2 A_3$ parallel, also gilt der ausgesprochene Satz auch für das Dreieck $P_1 P_2 P_3$.

Wir betrachten jetzt den speziellen Fall, in welchem A auf der Halbirungsgeraden des Winkels E_1 im Dreiecke $E_1 E_2 E_3$ liegt. Aus Gründen der Symmetrie liegt dann B ebenfalls auf dieser Halbirungslinie; liegt A im Durchschnitt der drei Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks, so fällt B mit ihm zusammen, und die Ellipse wird zum Kreis.

Ist A der Durchschnitt der drei Höhen im Dreieck $E_1 E_2 E_3$, so ist B der Mittelpunkt des diesem Dreieck umschriebenen Kreises. Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, ist blos nöthig zu zeigen, dass die drei Gegenpunkte $A_1 A_2 A_3$ auf dem Kreise liegen, welcher dem Dreieck $E_1 E_2 E_3$ umschrieben werden

kann. Die Schenkel des Winkels $A_1 A E_3$ stehen resp. senkrecht auf den Schenkeln des Winkels $E_1 E_2 E_3$ und es ist desshalb leicht nachzuweisen, dass diese Winkel einander gleich sind; ebenso zeigt man, dass $\sphericalangle\ E_2 A A_1 = E_1 E_3 E_2$, also ist
$E_2 A A_1 + A_1 A E_3 = E_2 A E_3 = E_1 E_2 E_3 + E_2 E_3 E_1 = 180^0 - E_2 E_1 E_3$. Da A_1 und A symmetrisch zu $E_2 E_3$ liegen, so ist $\sphericalangle\ E_2 A E_3 = E_2 A_1 E_3$ und desshalb $E_2 A_1 E_3 + E_2 E_1 E_3 = 180^0$; das Viereck $E_1 E_2 A_1 E_3$ ist also ein Kreisviereck und A_1 liegt auf dem Kreise, der durch $E_1 E_2 E_3$ geht. Der Beweis wiederholt sich für die Punkte A_2 und A_3.

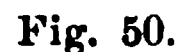
Fällt man vom Mittelpunkte des dem Dreiecke umschriebenen Kreises Perpendikel auf die Seiten derselben, so liegen ihre Fusspunkte in der Mitte derselben. Aus der Ellipsentheorie zieht man also ohne Mühe den elementaren Satz: In einem Dreiecke liegen die Mitten der Seiten mit den Fusspunkten der Höhen in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich dem Radius des dem Dreiecke umschriebenen Kreises ist, und dessen Mittelpunkt in der Mitte derjenigen Geraden liegt, welche den Höhenpunkt des Dreiecks mit dem Mittelpunkte des ihm umschriebenen Kreises verbindet. Zwei Tangenten der Ellipse bilden bekanntlich mit den Strahlen, die von ihrem Durchschnitt nach den Brennpunkten gezogen werden, gleiche Winkel. Daraus folgt: Zieht man von einer Ecke des Dreiecks Strahlen nach dem Höhenpunkt und dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, so bilden dieselben mit den anliegenden Dreiecksseiten gleiche Winkel.

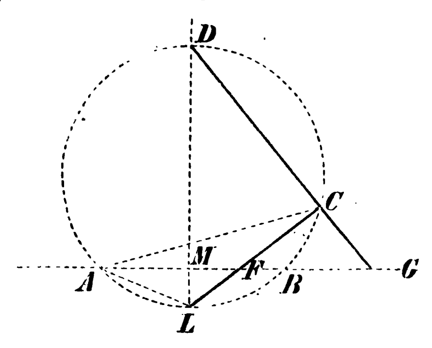
Der eben citirte Ellipsensatz gibt übrigens eine neue Lösung der Aufgabe: Den zweiten Brennpunkt einer Ellipse zu construiren, von welcher man einen Brennpunkt und drei diesen umschliessende Tangenten kennt. Man verbinde nämlich den gegebenen Brennpunkt durch einen Strahl mit einer Ecke, und trage von derselben Ecke aus einen andern Strahl ab, welcher zu dem gegebenen symmetrisch liegt in Bezug auf die beiden in dieser Ecke zusammenstossenden Seiten. Auf dem neuen Strahle muss der gesuchte Brennpunkt liegen, der so als Durchschnitt dreier Geraden gefunden wird. In dieser Construction liegt ein leicht auszusprechender elementarer Satz über das Dreieck.

Im Anschluss an die bis jetzt ausgeführte Tangententheorie der Ellipse mögen noch einige Sätze über die Normalen derselben hier Platz finden. Man nennt Normale des Punktes C der Ellipse

diejenige Gerade, welche in dem Punkte C auf der dort berührenden Tangente senkrecht steht. Zur weitern Untersuchung erinnern wir uns des Satzes: Legt man von einem Punkte D der kleinen Axe aus Tangenten an die Ellipse, welche in C und C' berühren mögen, so liegen die Punkte $CC'D$ mit den Brennpunkten A und B in einem Kreise.

Sei nun L der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit der kleinen Axe, so ist LC senkrecht auf CD im Punkte C, d. h. LC ist die Normale der Ellipse in diesem Punkte. Wenn man nun noch bemerkt, dass die Normale stets zwischen den Brennpunkten


Fig. 50.



durchgeht, so ergibt sich folgende Construction der Normalen in einem Punkte C der Ellipse: Man lege den Kreis durch die Punkte ABC, welcher die kleine Axe in zwei Punkten schneidet. Von der Verbindungsgeraden des Punktes C mit diesen beiden Schnittpunkten ist diejenige die gesuchte Normale, welche zwischen beiden Brennpunkten durchgeht.

Es gibt eine unendliche Anzahl von Ellipsen, welche dieselben Brennpunkte A und B haben. Zieht man von einem beliebigen Punkte der kleinen Axe aus an alle diese Ellipsen die Normalen, so liegen deren Fusspunkte in einem Kreise. Ein ähnlicher Satz kann für die Tangenten aufgestellt werden.

Sei F der Schnittpunkt der Normalen in C mit der grossen Axe und G der Schnittpunkt der zu C gehörigen Tangente mit derselben Axe, so hat man zunächst $\triangle\, ACL \sim FCB$, denn die Winkel bei C sind einander gleich als Peripheriewinkel über gleichem Bogen, und die Winkel bei B und L sind ebenfalls gleich, weil sie über demselben Bogen stehen. Man hat desshalb

$AC : CL = FC : BC$ oder $CF . CL = AC . BC$. Ebenso sind die Dreiecke ACG und CDB ähnlich, denn die Winkel bei A und B stehen über demselben Bogen, sind also gleich, und ebenso sind die Winkel bei C einander gleich, wie früher bereits gezeigt worden ist. Es folgt daraus $AC : CG = CD : CB$ und $CG . CD = AC . BC$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CGA und CBD folgt, dass $\sphericalangle CGA = CBD = CLD$ ist. Somit sind auch die Dreiecke FML und DMG ähnlich [sie sind beide rechtwinklig und die Winkel bei L und G sind einander gleich]. Es ist darum $FM : ML = MD : MG$, also $FM . MG = ML . MD$, und diess ist nach der Potenztheorie des Kreises (§ 1) $= MA^2 = MB^2 = c^2$. Wir haben also folgende Sätze:

Zieht man von irgend einem Punkte C einer Ellipse die Normale und die Tangente, so ist das Product aus den Abschnitten der Normalen zwischen den Fusspunkte C und der kleinen und der grossen Axe gleich dem Product der Abschnitte der entsprechenden Tangente zwischen dem Berührungspunkt C und der kleinen und der grossen Axe — gleich dem Producte der Leitstrahlen des Punktes C. Ferner ist das Product aus den Abschnitten der grossen Axe zwischen dem Mittelpunkte M und der Tangente und der dazu gehörigen Normalen gleich dem Producte aus den Abschnitten der kleinen Axe zwischen dem Mittelpunkte M und der Normalen und der Tangente, gleich dem Quadrate über der Excentrizität der Ellipse.

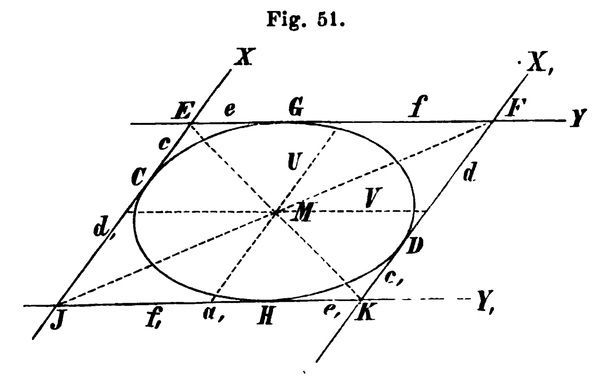
§ 12. Das der Ellipse umschriebene Parallelogramm. Conjugirte Durchmesser und Achsen.*

Sind zwei Paar paralleler Tangenten der Ellipse gegeben, X und X_1, Y und Y_1, so ist die Berührungssehne jedes Paares, CD und GH ein Durchmesser der Ellipse und wird durch deren Mittelpunkt M gehälftet, daher müssen auch die beiden Diagonalen EK, FJ des durch die Tangenten gebildeten Parallelogramms $EFKJ$ durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen und durch ihn gehälftet werden. In der That liegt die Mitte jeder

*) Um nicht eine Reihe schwierig auszuführender und nahezu identischer Figuren diesem § beigeben zu müssen, sind in dem Texte desselben Entwicklungen gegeben, die sich nicht durchaus auf die gezeichneten Figuren beziehen, die aber durch geringe Hülfsfiguren leicht verständlich sind.

durch X und X_1 begränzten Geraden in der Mittellinie U dieser Parallelen, und die Mitten aller durch Y und Y_1 begränzten Geraden sind in der Mittellinie V der genannten Parallelen enthalten; sollen also zwei Geraden GH, CD einander hälften, so muss ihr Durchschnitt sowohl in U als in V liegen, also ihr Schnittpunkt M sein; die Diagonalen hälften sich aber, also fällt ihr Schnittpunkt mit M zusammen. In Rücksicht der Abschnitte,

Fig. 51.

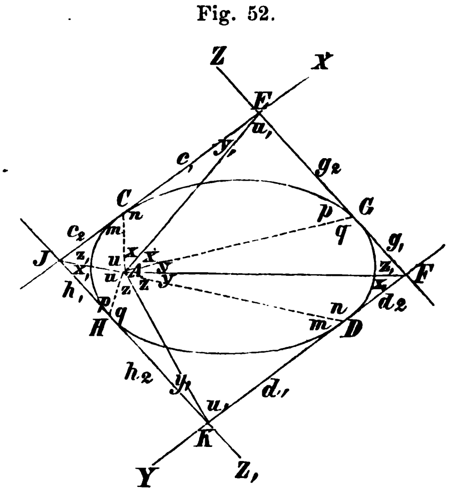


in welche die Seiten des Parallelogramms durch die Berührungspunkte getheilt werden, folgt zunächst aus der sofort sich darbietenden Congruenz von Dreiecken, dass die Gegenseiten gleich getheilt werden, nämlich dass: $c = c_1$, $d = d_1$; $e = e_1$, $f = f_1$, so dass man den vollständigen Satz hat: Bei jedem der Ellipse umschriebenen Parallelogramm gehen die Diagonalen durch den Mittelpunkt der Ellipse und werden von ihm gehälftet, und die Gegenseiten werden durch ihre Berührungspunkte gleich getheilt. Die Diagonalen sind, da sie durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, Durchmesser derselben und zwar heissen sie, beide zusammengefasst, zugeordnete oder conjugirte Durchmesser der Ellipse.

Werden aus dem einen oder andern Brennpunkte, etwa aus A, nach den Ecken und nach den Berührungspunkten der Seiten eines der Ellipse umschriebenen Parallelogrammes Strahlen gezogen, so finden zwischen den Winkeln, welche diese acht Strahlen theils unter sich, theils mit den Seiten bilden, folgende Beziehungen statt: Die zunächst auf einander folgenden Strahlen bilden nur viererlei Winkel x, y, z, u, weil jede zwei der nämlichen Ecke anliegende Abschnitte der Seiten vom Brennpunkte

aus unter gleichem Winkel gesehen werden; also ist auch $x + y + z + u = 180^0$. Die Strahlen nach den Ecken bilden mit den resp. Seiten auch nur viererlei Winkel x_1 y_1 z_1 u_1 und zwar sind diese den vorigen gleich. Ebenso bilden die Strahlen nach den Berührungspunkten mit den Seiten nur viererlei Winkel $mnpq$, die beziehlich den Winkeln gleich sind, welche die Strahlen nach den Ecken unter sich bilden, also den Winkeln, unter welchen die Seiten vom Brennpunkte aus gesehen werden; diese

Fig. 52.



Winkel $mnpq$ sind resp. die Summen der vorigen Winkel zu zweien genommen: $m = x + y$, $n = z + u$, $p = y + z$, $q = u + x$. [Man hat z. B. Winkel $m = FAE = x + y$. Denn wenn E in C fällt, so ist F unendlich entfernt, also $AF \parallel KD \parallel CJ$, folglich $m = CAF_\infty$ als Wechselwinkel. Da also $m = EAF$ oder $x + y$ und als Aussenwinkel $m = x + y_1$, so ist $y_1 = y$ u. s. w.] Die acht Strahlen, welche aus dem andern Brennpunkte B nach den Ecken und nach den Berührungspunkten des Parallelogramms gezogen werden, sind resp. jenen gleich, so wie auch die Winkel, welche sie unter sich und mit den Seiten bilden; nämlich ein Strahl aus A und ein Strahl aus B sind gleich, wenn sie nach Gegenecken oder nach Berührungspunkten von Gegenseiten gehen, und sie bilden mit den Seiten gleiche Winkel, wenn sie nach derselben Ecke oder nach denselben Berührungspunkten gezogen sind (so wie auch, wenn sie nach entgegengesetzten gezogen sind).

Man hat nun verschiedene Paare ähnlicher Dreiecke, aus denen mannigfache Relationen folgen, z. B.:

Die Dreiecke *ECA* und *ADF* sind ähnlich, daher $c_1 : c = d : d_2$ oder 1) $c_1 d_2 = cd$ und da $d_2 = c_2$, so ist auch 2) $c_1 c_2 = cd$ und ferner $c : e = d_2 : f_1$ oder 3) $cf = ed_2$ und 4) $de = cf_1$. Daraus folgt, wofern die Tangenten in *C* und *D* als fest, dagegen die Tangente in *G*, d. h. *EF* als veränderlich angesehen wird:

Von irgend zwei festen parallelen Tangenten *C*, *D* der Ellipse schneidet jede beliebige dritte, oder eine bewegliche dritte Tangente stets solche Stücke $CE = c_1$, $DF = d_2$ ab, deren Rechteck constant, nämlich dem Rechtecke unter den aus dem (einen oder andern) Brennpunkte nach den Berührungspunkten der festen Tangenten gezogenen Strahlen $c_1 d$ gleich ist. Und wofern die Tangente *C* als fest, dagegen das Tangentenpaar *G* und *H* als veränderlich angenommen wird: Von irgend einer festen Tangente *C* der Ellipse schneidet jedes beliebige Paar paralleler Tangenten *EG* und *JH* stets solche Stücke $CE = c_1$, $CJ = c_2$ ab, deren Rechteck constant; nämlich dem Rechteck unter den aus den Brennpunkten *A*, *B* nach dem Berührungspunkte *C* der festen Tangente gezogenen Strahlen *c*, *d* gleich ist. [Denn der Strahl *BC* ist $= AD = d$.]

Da jede zwei Dreiecke ähnlich sind, welche über Abschnitten stehen, die einer Seite anliegen, so hat man nach Art der vorhin gefundenen Gleichungen noch die folgenden:

$$5) \begin{cases} de = fc_1 & cf = ed_2 \\ gi = eh_1 & gk = fh_2 \\ ek = id_1 & di = kc_2 \\ hf = kg_1 & he = ig_2 \end{cases}$$

Werden je vier und vier unter einander stehende in einander multiplizirt, so kommt 6) $cgdh = c_1 g_1 d_1 h_1$ und $cgdh = c_2 g_2 d_2 h_2$, also auch 7) $c_1 g_1 d_1 h_1 = c_2 g_2 d_2 h_2$. Da ferner $c_1 = d_1$ und $g_1 = h_1$ ist, so folgt $cgdh = c_1^2 g_1^2$ und ebenso $cgdh = c_2^2 g_2^2$, desshalb $c_1 g_1 = c_2 g_2$ oder $c_1 : c_2 = g_2 : g_1$, d. h.: Werden die Abschnitte der Seiten des Parallelogramms im Laufe seines Umfangs numerirt, so ist das Product der vier ungeraden Abschnitte gleich dem Product der vier Geraden; zudem ist jedes Product gleich dem Product der aus dem Brennpunkt nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen. Und insbesondere: Bei je zwei sich anliegenden Seiten ist das Product der zwei ungeraden Abschnitte

gleich dem der zwei Geraden. Ferner ist das Product der vier Strahlen nach den Berührungspunkten gleich dem Producte der Quadrate zweier sich folgender gerader oder ungerader Abschnitte.

Den zwei Dreiecken, welche über Abschnitten stehen, die der nämlichen Seite anliegen, ist allemal dasjenige dritte ähnlich, welches über der dieser Seite gegenüberliegenden Seite steht; z. B. sind die Dreiecke GEA, HAJ und AKF ähnlich, daher: $k : d_1 + d_2 = g_2 : e$ und $f : d_1 + d_2 = h_1 : i$ oder 8) $ke = g_2 (d_1 + d_2) = g_2 D$ und $fi = h_1 (d_1 + d_2) = h_1 D = h_1 C = c_2 H = d_2 G$. Da $h_1 = g_1$, so ist ferner

$$9)\quad ke + fi = (g_1 + g_2)(d_1 + d_2) = GD.$$

$$10)\quad efki = g_1 g_2 (d_1 + d_2)^2 = g_1 g_2 D^2 = c_1 c_2 G^2 = c_1 g_1 CG.$$

$$11)\quad \frac{ke}{fi} = \frac{g_2}{g_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{d_1}{d_2}$$

Weiter hat man $g : e = f : D$ oder 12) $gD = ef$ und ebenso $hD = ki$; jetzt ist aber $g + h = 2a$ [gleich der grossen Axe] und desshalb

$$13)\quad \begin{cases} 2aD = ef + ki \text{ und ebenso} \\ 2aG = ei + fk, \text{ mithin} \end{cases}$$

14) $2a (D \pm G) = (e \pm k)(f \pm i)$ und 15) $\frac{D}{G} = \frac{ef + ki}{ei + fk}$.

Schliesslich erhält man durch Combination von 9) und 15)

$$D^2 = \frac{(ke + fi)(ef + ki)}{ei + kf}$$

diese Gleichungen ergeben nun folgende Sätze:

Das Rechteck zweier Strahlen, welche nach zwei Gegenecken des Parallelogramms gezogen sind, ist gleich dem Rechteck jeder Seite und des mit ihr einer der Gegenecken anliegenden Abschnittes einer andern Seite. — Die Summe der Rechtecke unter den zwei Paar Strahlen (k und e, f und i) nach den Gegenecken ist gleich dem Rechteck unter zwei sich anliegenden Seiten des Parallelogramms. [Dieser Satz ist durchaus analog dem ptolemäischen Satze vom Kreisviereck*, woraus sofort einige Folgerungen gezogen werden sollen.] — Die Summe der Rechtecke unter den zwei Paar Strahlen, die nach den Endpunkten zweier

* Der citirte Satz heisst: Bei einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck, dessen Seiten unverlängert sich nicht schneiden, ist das Product der Diagonalen der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten gleich.



Gegenseiten gehen, ist gleich dem Rechteck unter einer der übrigen Seiten und der grossen Axe der Ellipse. Es mag noch beigefügt werden, dass die Summe der Winkel bei A über zwei Gegenseiten des Parallelogramms constant: $x + y + z + u = 180^0$ ist. — Es gibt allemal einen bestimmten Kreis, in welchen die vier Strahlen $efki$ nach den Ecken sich als Seiten eines eingeschriebenen Vierecks eintragen lassen, und sodann sind bei dem nämlichen Kreise drei verschiedene Vierecke möglich, je nachdem die Seiten in der Ordnung $efki$ oder $efik$ oder $ekfi$ sich folgen; die Diagonalen des ersten sind gleich den Seiten des Parallelogramms, und von den Diagonalen der beiden andern ist die eine der grossen Axe der Ellipse und die andere der einen oder der andern Seite des Parallelogramms gleich. Die Winkel der drei Vierecke sind die nämlichen, welche die vier Strahlen schon in ihrer ursprünglichen Lage unter sich bilden. Der genannte Kreis ist demjenigen gleich, welcher durch den Brennpunkt und durch die beiden Endpunkte irgend einer Seite des Parallelogramms geht. — Beschreibt man durch den Brennpunkt und durch die beiden Endpunkte jeder Seite eines der Ellipse umschriebenen Parallelogrammes Kreise, so haben diese vier Kreise gleiche Radien.

Das Product der vier Strahlen nach den Ecken eines umgeschriebenen Parallelogramms ist gleich dem Quadrate irgend einer Seite, multiplizirt in die beiden Abschnitte einer ihr anliegenden Seite. — Die Producte der Strahlen nach den Gegenecken verhalten sich wie die den resp. Ecken anliegenden Abschnitte jeder Seite. — Das Rechteck unter den zwei Strahlen nach den Endpunkten einer Seite des Parallelogrammes ist gleich dem Rechtecke unter dem nach dem Berührungspunkte dieser Seite gehenden Strahl in eine ihr anliegende Seite. —

Das Rechteck unter der grossen Axe und der Summe (oder Differenz) zweier sich anliegender Seiten ist gleich dem Rechteck unter den Summen (oder Differenzen) der beiden Paar Strahlen nach den Gegenecken des Parallelogramms. Soll $D = G$ und somit das Parallelogramm gleichseitig (eine Raute) sein, so muss auch $e = k$ oder $i = f$ sein, und daher nothwendig die Diagonale EK oder FJ auf die kleine Axe fallen. Also folgt daraus zugleich: Bei jeder der Ellipse umgeschriebenen Raute fallen die Diagonalen der letztern auf die Axen der erstern. — Zwei sich anliegende

Seiten des Parallelogramms verhalten sich umgekehrt, wie die Summe der Rechtecke unter den Strahlenpaaren nach den Endpunkten dieser Seiten und ihrer Gegenseiten. Da nach 8) $C:H=c_2:h_1$, ebenso analog: $C:G=c_1:g_2$, $H:D=h_2:d_1$, $D:G=d_2:g_1$, daher $CH \parallel EK$, $CG \parallel FJ$, $HD \parallel FJ$, $DG \parallel EK$, so folgt weiter: Bei jedem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm sind die Berührungspunkte die Ecken eines andern Parallelogrammes, dessen Seiten den Diagonalen des erstern parallel sind. — Zieht man die Gerade JM, so muss sie, da M die Mitte von EK ist, auch durch die Mitte von CH ($\parallel EK$) gehen; also: Der Durchschnitt J zweier Tangenten, die Mitte ihrer Berührungssehne CH und der Mittelpunkt der Ellipse liegen allemal in einer Geraden; die Gerade durch irgend zwei dieser Punkte geht daher nothwendig durch den dritten. Anders ausgedrückt heisst dieser Satz: Der Durchschnitt J zweier Tangenten und die Mitte ihrer Berührungssehne liegen in einem und demselben Durchmesser der Ellipse.

Aus 6) und 10) folgt:

16) $efki:cdgh = c_1g_1CG:c_1^2g_1^2 = CG:c_1g_1 = C^2:c_1c_2 = G^2:g_1g_2$, d. h.: Daß Product der vier Strahlen nach den Ecken verhält sich zum Producte der vier Strahlen nach den Berührungspunkten, wie das Quadrat jeder Seite zum Rechteck unter ihren Abschnitten. — Wenn insbesondere das eine Paar Gegenseiten des Parallelogramms der Berührungssehne des andern Paars parallel läuft, so ist auch dieses Paar der Berührungssehne des erstern parallel, und so sind alsdann die vier Abschnitte in jedem Paar Gegenseiten einander gleich, und zwar gleich dem halben Durchmesser, welcher die Berührungspunkte des andern Paares verbindet, also $c_1=c_2=d_1=d_2=\alpha$, und $g_1=g_2=h_1=h_2=\beta$ wo α und β die halben genannten Durchmesser GH und CD sind. Für diesen besondern Fall hat man: $efki:cgdh=4\alpha^2:\alpha^2=4\beta^2:\beta^2$ oder

17) $efki = 4cgdh = 4c_1^2g^2 = 4\alpha^2\beta^2 = \frac{1}{4}C^2G^2$.

Also: Bei jedem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm, dessen Seitenpaare den Durchmessern parallel sind, welche durch die Berührungspunkte der Gegenseiten gehen, ist das Product der Strahlen nach den Ecken gleich dem vierfachen Product der Strahlen nach den Berührungspunkten, oder gleich einem Viertel des Products aus den Quadraten zweier anliegender Seiten.

In Bezug auf ein der Ellipse umgeschriebenes Parallelogramm $EFKJ$ ergeben sich weiter folgende Eigenschaften:

Wird die Berührungssehne DG bis an die Tangente X verlängert, so ist $EL = EC = c_1$, weil nach dem Obigen DG parallel der Diagonale EK, daher $LE = KD = d_1$ und auch $d_1 = c_1$. Ebenso muss die Sehne CG der Tangente Y in einem Punkte T begegnen, für welchen $FT = FD$ ist. Also: Bei irgend zwei parallelen Tangenten XC, YD der Ellipse findet die Eigenschaft statt, dass, wenn aus dem Berührungspunkte D der einen durch irgend einen Peripheriepunkt G eine Gerade DGL bis an die andere gezogen wird, dann von dieser ein doppelt so grosses Stück CL abgeschnitten wird, als durch die Tangente im genannten Punkt G, $CL = 2CE$, $DT = 2DF$.

Da, wenn X, Y fest, dagegen G oder Z beweglich, das Product $CE \, . \, DF$ constant $= p^2$ bleibt, so ist ebenso das Product $CL \, . \, DT = 4p^2$ constant. Die Ellipse ist also bestimmt, wenn irgend zwei parallele Tangenten X, Y nebst ihren Berührungspunkten CD, so wie ferner irgend eine dritte Tangente Z, die jedoch nicht zwischen den Punkten C und D durchgeht, oder irgend ein zwischen jenen Tangenten liegender Punkt G gegeben ist. Denn im ersten Falle hat man p^2 unmittelbar $= CE \, . \, DF$, wodurch man neue Punkte E_1 F_1 so finden kann, dass $CE_1 \, . \, DF_1 = p^2$. Im andern Falle ziehe man aus CD durch G bis an die gegenüberliegenden Tangenten Y, X, erhält dadurch die Punkte L, T, wo dann wiederum $4p^2$ bestimmt ist durch $4p^2 = CL \, . \, DT$; durch neue Punkte L_1, T_1 werden auch neue Punkte G_1 gefunden. — Man kann jetzt auch den Satz aussprechen: Werden in zwei parallelen Geraden XY die Punkte C, D beliebig angenommen und als fest betrachtet, und werden sodann in den Geraden nach gleicher Richtung von den festen Punkten aus je solche andere zwei Punkte E, F bestimmt, dass $CE \, . \, DF$ einen gegebenen constanten Werth behält, so ist der Ort der Geraden EF eine Ellipse, welche die gegebenen Geraden XY in den festen Punkten CD berührt, und ebenso ist der Ort des Durchschnitts g der Strahlen CF, DE eine andere Ellipse, welche gleichfalls die Geraden XY in den Punkten CD berührt. —

Tritt zu den vier Tangenten der Ellipse, die ein Parallelogramm $EFKJ$ bilden, eine beliebige fünfte V oder PR, die in N berührt, hinzu, so wird diese von den zwei Paaren paralleler

Tangenten in P und Q, R und S so geschnitten, dass $NP \,.\, NQ = NR \,.\, NS$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PQS und QER folgt ferner $PK \,.\, RE = SK \,.\, QE$; es soll nun gezeigt werden, dass diese Rechtecke constanten Inhalt haben, wie auch die Tangente V ihre Lage ändern mag.

Nach dem Obigen erscheint das Stück SQ der beweglichen Tangente V dem Brennpunkte A unter dem constanten Winkel u; zudem sind die y_1 bei E und K einander gleich, daher muss, vermöge der Dreiecke KAS und EQA $\alpha + \beta_1 = \beta + \alpha_1$ sein; da aber $\alpha + \beta$ constant ist, weil u es ist [nämlich $\alpha + \beta = u + x + z$, und ebenso $\alpha_1 + \beta_1 = u + x_1 + z_1$, also $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$], so folgt $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$. Demnach sind die Dreiecke KAS und EQA ähnlich und es ist:

$$ek = KS \,.\, EQ = KP \,.\, ER = \text{const.}$$

Diesen nämlichen constanten Werth haben auch die Rechtecke $EC \,.\, KJ$ und $KH \,.\, EJ$, was als spezieller Fall auch aus dem Gegenwärtigen folgt, indem nämlich gleichzeitig Q in C und S in J oder anderseits S in H und Q in J fallen kann; in Hinsicht der Gegenecken F, J ist natürlich analog $FP \,.\, JS = FR \,.\, JQ = \text{const.} = fi = FK \,.\, JH = FD \,.\, JK$. Man zieht daraus folgende Resultate:

Werden die Seiten eines der Ellipse umgeschriebenen Parallelogrammes von irgend einer fünften Tangente V geschnitten, und werden die Abschnitte von zwei Gegenecken (E und K, oder F und J) aus genommen, so sind die Rechtecke unter den Abschnitten jedes Seitenpaares, welches einer der beiden andern Ecken anliegt, constant, und zwar für beide Paare von gleichem Inhalte, nämlich gleich dem Inhalte des Rechtecks unter den Strahlen aus dem Brennpunkte nach jenen zwei ersten Gegenecken; und insbesondere hat auch das Rechteck unter jeder der beiden Seiten und demjenigen Abschnitte der andern, welcher durch ihren Berührungspunkt bestimmt wird, denselben Inhalt. Dadurch sind also auch beliebige solche fünfte Tangenten V zu construiren. Ferner:

Werden in zwei festen Geraden Y und Z (oder X und Z_1) zwei beliebige feste Punkte K und E angenommen, und werden sodann in den Geraden, auf gleicher Seite von den festen Punkten, d. h. auf den Seiten KF und EF oder KP und ER zwei veränderliche Punkte P und R (oder p und r) unter der Be-

dingung construirt, dass das Rechteck unter ihren Abständen von den resp. festen Punkten constanten Inhalt hat [also $KP \cdot ER = \text{const.}$], so ist der Ort der Geraden PR (und pr) eine bestimmte Ellipse, deren Mittelpunkt M in der Mitte der Geraden KE liegt, und welche auch die zwei festen Geraden berührt, und zwar in denjenigen Punkten D und G, für welche die Rechtecke $KD \cdot EF$ und $EG \cdot KF$ [wovon jedes eine gegebene Seite hat] den nämlichen constanten Inhalt haben. Die Punkte D und F, so wie F und G sind nur besondere entsprechende Punkte, statt P und R, sie müssen desshalb auch in Bezug auf die festen Punkte K und E nach einerlei Seite hin liegen. —

Kommt die veränderliche Tangente V insbesondere in die Lage, wo sie mit einer der beiden Diagonalen EK, FJ parallel ist, sei etwa V_1 oder $sq \parallel EK$ und n der Berührungspunkt, so ist zunächst $EK = pQ = rs$, und demnach auch $ps = rq$. Es ist aber nach Früherem $np \cdot nq = nr \cdot ns$, oder also auch: $np\,(nr + rq) = nr\,(np + ps)$ oder $np \cdot rq = nr \cdot ps$, und da ja $ps = rq$ ist, $np = nr$ und $nq = ns$, d. h. der Berührungspunkt n ist die Mitte von jeder der Strecken pr und qs. Da auch M die Mitte der Diagonale EK ist, so muss folglich n im Durchmesser FM liegen, in welchem zugleich die Mitte der Berührungssehne DG liegt. —

Denkt man sich nun für einen Augenblick das Parallelogramm $EFKJ$ veränderlich, aber so, dass die eine Ecke, etwa E, in dem durch sie gehenden festen Durchmesser ME fortrückt, so muss die Gegenecke K sich auf dem nämlichen Durchmesser ganz gleich bewegen, also nach K_1 gelangen, wo $MK_1 = ME_1$ ist; und alsdann muss der Berührungspunkt n der mit dieser festen Diagonale EK oder E_1K_1 parallelen Tangente V_1 gleicherweise wie vorhin mit dem festen Mittelpunkte M und dem veränderlichen Durchschnitte F_1 in einem und demselben Durchmesser liegen. Dieser Durchmesser ist aber durch die festen Punkte M und n bestimmt, folglich müssen sich die veränderlichen Ecken F und J, oder F_1 und J_1 auf demselben bewegen. Bleibt also bei einem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm $EFKJ$ die eine Diagonale, etwa EK, fest, d. h. in einem festen Durchmesser, so bleibt auch die andere FJ auf einem bestimmten festen Durchmesser Mn, welcher insbesondere durch die Berührungspunkte n und n_1 derjenigen beiden Tangenten V_1 und

V_2 geht, welche der der ersten Diagonale parallel sind. Ebenso sind die Tangenten in den Punkten, in welchen die Ellipse von der Diagonale EK geschnitten wird, mit der andern Diagonale FJ parallel oder umgekehrt: die Berührungspunkte der der Diagonale FJ parallelen Tangenten liegen in EK.

Mit dem Parallelogramme bewegt sich zugleich auch die Berührungssehne DG; aber sie bleibt stets dem festen Durchmesser EF parallel, und ihre Mitte m bleibt stets auf dem festen Durchmesser FJ oder Mn. Daher nothwendig auch umgekehrt: Die Mitten m aller mit EK parallel gezogenen Sehnen DG liegen in dem Durchmesser nn_1 oder FJ, und die beiden Tangenten in den Endpunkten DG der Sehne schneiden sich auf diesem nämlichen Durchmesser FJ; oder denkt man sich die Tangenten beweglich und lässt ihren Durchschnitt F sich auf dem festen Durchmesser JMF bewegen, so bleibt die Berührungssehne CG stets dem Durchmesser KME parallel und ihre Mitte m bleibt im ersten Durchmesser nMn_1. So wie die beiden Sehnen DG und CH der festen Diagonale EK stets parallel sind, ebenso sind die beiden Berührungssehnen CG und DH beständig der festen Diagonale FJ parallel, und ihre Mitten liegen in EK.

Zwei Durchmesser der bezeichneten Art wie EK und FJ werden [was bereits im Anfange dieses § bemerkt worden ist] conjugirte Durchmesser der Ellipse genannt. Zufolge unserer Betrachtungen besteht ihre charakteristische reciproke Eigenschaft darin, dass jeder durch die Mitten aller Sehnen geht, welche mit dem andern parallel sind, also auch insbesondere durch die Berührungspunkte der beiden Tangenten, welche mit dem andern parallel sind. —

Hieran schliessen sich nun folgende Resultate:

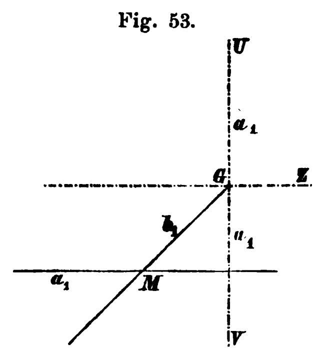
Zu jedem Durchmesser A der Ellipse gibt es stets einen, aber auch nur einen ihm zugeordneten conjugirten Durchmesser B; er ist durch die Tangenten in den Endpunkten des ersten bestimmt, weil er ihnen parallel ist. Insbesondere sind auch die Axen ein Paar conjugirter Durchmesser.

§ 13. Verschiedene Constructionen. Gleichung der Ellipse.

Sei Z eine beliebige Tangente der Ellipse mit dem Berührungspunkt G, dann schneidet irgend ein Paar conjugirter Durchmesser auf Z zwei Punkte E und F aus, die auf verschie-

denen Seiten von G liegen und der Bedingung Genüge leisten: $EG \cdot GF = a_1^2$, wo a_1 die Hälfte desjenigen Durchmessers ist, welcher der Tangente Z parallel läuft, was aus frühern Sätzen unmittelbar zu folgern ist. Schlägt man nun über jedem Punktenpaare EF den Kreis, dessen Mittelpunkt auf Z liegt, so schneiden sich alle diese Kreise in zwei festen Punkten, die in der Senkrechten auf Z in G je im Abstande a_1 von G liegen. Durch die Potenztheorie des Kreises wird die Richtigkeit dieser Behauptung evident.

Fig. 53.



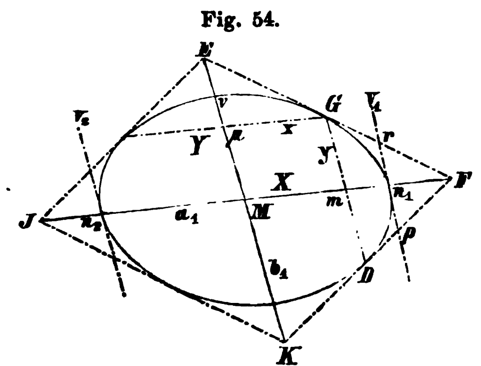
Jetzt kann man, sobald von einer Ellipse zwei conjugirte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ der Grösse und Lage nach gegeben sind, beliebig viele anderer Paare conjugirter Durchmesser in ihrer Richtung bestimmen. In einem Endpunkte G des Durchmessers $(2b_1)$ ziehe man eine Parallele Z zu $(2a_1)$ und auf Z in G eine Senkrechte UV, so dass $GU = GV = a_1$ ist. Irgend ein Kreis durch UV schneidet nun Z in zwei Punkten E und F, welche mit dem Durchschnittspunkte M der conjugirten Durchmesser (der zugleich Mittelpunkt der Ellipse ist) verbunden die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser ergeben. Zieht man den Kreis durch MUV, so erhält man das einzige Paar conjugirter Durchmesser, das einen rechten Winkel einschliesst, die Axen.

Es mögen hier noch einige Sätze und Constructionen an einander gereiht werden, die nach dem bereits Entwickelten keiner weitern Ausführung bedürfen. Die Mitten $m\,m_1$ je zweier paralleler Sehnen DG und DG_1 liegen in einem Durchmesser $n\,n_1$, d. h. liegen mit dem Mittelpunkte M der Ellipse in einer Geraden. Hierdurch ist also der Mittelpunkt M zu finden, wenn die Ellipse gezeichnet gegeben ist, denn man findet den Durchmesser nn_1, in dessen Mitte M liegt. Auch sind die Tangenten in den Endpunkten nn_1 dieses Durchmessers zu construiren; sie sind den Sehnen DG, D_1G_1 parallel. — Die Mitten m jedes Systems paralleler Sehnen und die Durschnitte F der Tangentenpaare in ihren Endpunkten liegen in einem und demselben Durchmesser FJ, welcher dem den Sehnen parallelen Durchmesser EK conjugirt

ist. Und umgekehrt, die Berührungssehnen DG aller Tangentenpaare, welche aus Punkten F eines festen Durchmessers FJ an die Ellipse gelegt werden, sind parallel, nämlich dem Durchmesser EK parallel, und ihre Mitten m liegen sämmtlich in jenem ersten Durchmesser. — Zieht man aus den Endpunkten D, E irgend eines Durchmessers der Ellipse nach irgend einem beliebigen Peripheriepunkt G Sehnen CG, DG, so sind diese allemal irgend zweien conjugirten Durchmessern FJ, EK parallel; nämlich diese Durchmesser gehen durch die Mitten der Sehnen. Hierdurch gewinnt man eine Uebersicht des ganzen Systems conjugirter Durchmesser der Ellipse, und einen neuen Beweis, dass unter ihnen nur ein einziges Paar rechtwinklig zueinanderstehender (die Axen) existirt. — Durch jede Sehne DG sind zwei conjugirte Durchmesser bestimmt, der eine EK ist ihr parallel und der andere JF geht durch ihre Mitte (m). — Ist die Ellipse gezeichnet vorgelegt, so wird die Richtung ihrer Axen gefunden, wenn man um ihren Mittelpunkt irgend einen sie schneidenden Kreis beschreibt; die Schnittpunkte bestimmen alsdann ein Rechteck, dessen Seiten den Axen parallel und dessen Diagonalen gemeinschaftliche Durchmesser des Kreises und der Ellipse sind. [Die Construction gründet sich auf die Symmetrie der Ellipse gegenüber ihren Axen.] — Bei jedem der Ellipse eingeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten irgend zweien conjugirten Durchmessern parallel; beim Rechteck insbesondere den Axen. Zieht man aus einem beliebigen Peripheriepunkt G mit irgend zwei conjugirten Durchmessern parallele Sehnen, so liegen ihre andern Endpunkte C, D allemal mit M in einer Geraden, d. h. sie sind zugleich die Endpunkte irgend eines Durchmessers CD. Und bewegt sich der Scheitel G des constanten Winkels ohne Drehung, so dass seine Schenkel stets denselben festen conjugirten Durchmessern parallel bleiben, in der Ellipse herum, so dreht sich der Durchmesser CD um M. Ist die Grundlinie CD eines Dreiecks CGD fest, und sollen die Schenkel CG, DG zwei conjugirten Durchmessern einer gegebenen Ellipse $\mathfrak{M}$ parallel sein, so ist der Ort der Spitze G ebenfalls eine Ellipse M, die der gegebenen ähnlich und mit ihr ähnlich liegend ist. Sind die Seiten eines der Ellipse umschriebenen Parallelogramms zwei conjugirten Durchmessern parallel, also seine Berührungspunkte die Mitten der Seiten und zugleich die Endpunkte oder Scheitel der genannten Durchmesser,

so sind seine Diagonalen dasjenige Paar conjugirter Durchmesser, welche zu den erstgenannten harmonisch sind. Der Beweis wird geführt, indem man zeigt, dass eine der Seiten des Parallelogramms von den vier Duchmessern in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. [Einer von den vier Schnittpunkten liegt in unendlicher Entfernung, sein zugeordneter in der Mitte zwischen den beiden andern.] Zu jedem Paar conjugirter Durchmesser gibt es also allemal ein, aber nur ein bestimmtes anderes Paar, welches zu ihm harmonisch ist. Dabei fällt jedes Paar in die Diagonalen desjenigen umgeschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten dem andern Paar parallel sind. Ist das eine Paar gegeben, so lege man in den Scheiteln desselben die Tangenten, die ein Parallelogramm bilden — in dessen Diagonalen liegt dann das andere Paar; oder zwischen den Scheiteln des ersten ziehe man die Sehnen, so gehen die andern durch die Mitten dieser Sehnen. Die zu den Axen gehörigen harmonischen conjugirten Durchmesser bilden mit jeder Axe gleiche Winkel, und sind demzufolge (aus Symmetriegründen) einander gleich. — Die Tangente V_1 sei der Diagonale EK des umschriebenen Parallelogrammes $EFKJ$ parallel; nach Früherem ist dann: $EG \cdot KF = Er \cdot Kp = ek$.

Fig. 54.



Daraus folgt: $\frac{EG}{Er} = \frac{Kp}{KF}$ und weil $V_1 \parallel EK$, so ist auch $\frac{Kp}{KF} = \frac{Er}{EF}$ daher $\frac{EG}{Er} = \frac{Er}{EF}$ oder $Er^2 = EG \cdot EF$. Da EK, Gm, rn_1 parallel sind, so ist $EG : Er : EF = Mm : Mn_1 : MF$, also auch $Mn_1{}^2 = Mm \cdot MF$. Construirt man noch die andere der Diagonale EK parallele Tangente V_2 und deren Berührungspunkt n_2, so sind n_1 und n_2 die Endpunkte des Durchmessers MF

und M liegt in der Mitte zwischen n_1 und n_2; daraus schliesst man vermöge der letzten Gleichung, dass die vier Punkte F, n_1, m, n_2 harmonisch und dabei F und m, so wie n_1 und n_2 zugeordnet sind. Also:

Das Rechteck unter den Abständen der Mitte m einer beliebigen Sehne DG und des Durchschnittes F der Tangenten in ihren Endpunkten vom Mittelpunkte M der Ellipse ist gleich dem Quadrat des halben Durchmessers Mn_1, in welchem jene beiden Punkte liegen.

Man bezeichne die halbe Sehne GD, also Gm, durch y, die halbe Sehne GC, also $G\mu$, durch x, so ist, da die Sehnen beziehlich den conjugirten Durchmessern EK und JF parallel sind, auch $M\mu = y$ und $Mm = x$. Ferner setze man $ME = Y$, $MF = X$ und $Mn_1 = a_1$, $M\nu = b_1$. Dabei werden x und y die Coordinaten des Punktes G in Bezug auf die conjugirten Durchmesser MF und ME genannt, und zwar heisst x die Abscisse, y die Ordinate des Punktes; gleicherweise kann man X und Y als die Coordinaten der Tangente in Rücksicht auf die nämlichen conjugirten Durchmesser auffassen.

Im Dreieck EMF ist Gm oder y parallel EM, daher $Gm : EM = FG : FE$ oder $\frac{y}{Y} = \frac{FG}{FE}$; ferner ist $G\mu = x$ parallel FM und daher $G\mu : FM = EG : EF$ oder $\frac{x}{X} = \frac{EG}{FE}$, demnach ist $\frac{y}{Y} + \frac{x}{X} = \frac{FG + GE}{FE} = \frac{FE}{FE}$

$$\text{also 1)} \quad \frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 1.$$

Nach dem vorhin bewiesenen Satze ist aber

$$2) \quad xX = a_1^2, \; yY = b_1^2.$$

Werden aus 2) das eine Mal die Werthe von X und Y, das andere Mal die Werthe von x und y genommen und in 1) eingesetzt, so kommt:

$$\text{I.} \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

$$\text{II.} \quad \frac{a_1^2}{X^2} + \frac{b_1^2}{Y^2} = 1.$$

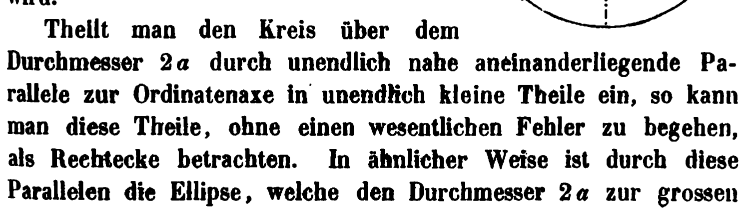
Von diesen beiden Gleichungen heisst die erste die Gleichung der Ellipse in Rücksicht ihrer Punkte und in Bezug auf zwei conjugirte Durchmesser $M\nu$ und Mn_1 als Coordinatenaxen, und die andere kann aufgefasst werden als die Gleichung der Ellipse

in Rücksicht ihrer Tangenten und in Bezug auf dieselben zwei conjugirten Durchmesser. Durch die erste werden alle Punkte, durch die zweite alle Tangenten der Ellipse bestimmt.

Wählt man die Axen der Ellipse zu Coordinatenaxen, so lautet die Gl. I: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Schlägt man nun den Kreis über der grossen Axe als Durchmesser, so findet man als Gleichung derselben [wenn er als Ellipse aufgefasst wird] $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$, wo $x_1 y_1$ die Coordinaten irgend eines seiner Punkte sind. Betrachtet man einen Punkt des Kreises mit dem ihm zunächst liegenden Ellipsenpunkt $x_1 y$, der die gleiche Abscisse hat, so folgt aus den Gleichungen $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Relation $\frac{y_1^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ oder $y = \frac{b}{a} y$. Man erhält demnach aus dem Kreise die Ellipse, indem man ihn auf zwei senkrecht zu einander stehende Durchmesser als Coordinatenaxen bezieht, und dann jeden seiner Punkte ersetzt durch einen Punkt, der mit ihm gleiche Abscisse hat, und dessen Ordinate sich zur Ordinate des Kreispunktes verhält wie $b : a$. Diess gibt folgende Construction der Ellipse aus ihren Punkten, wenn die Axen $2a$ und $2b$ gegeben sind.

Man schlage einen Kreis K_1 über der grossen Axe als Durchmesser und einen conzentrischen Kreis K_2 über der kleinen Axe als Durchmesser. Durch den Mittelpunkt M ziehe man nun eine beliebige Gerade, welche K_1 in p_1 und K_2 in p_2 schneidet. Eine Parallele durch p_1 zur kleinen Axe und eine Parallele durch p_2 zur grossen Axe schneiden sich in einem Punkte p der Ellipse, wie durch höchst einfache elementare Betrachtungen sofort erwiesen wird.

Fig. 55.



Theilt man den Kreis über dem Durchmesser $2a$ durch unendlich nahe aneinanderliegende Parallele zur Ordinatenaxe in unendlich kleine Theile ein, so kann man diese Theile, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, als Rechtecke betrachten. In ähnlicher Weise ist durch diese Parallelen die Ellipse, welche den Durchmesser $2a$ zur grossen

Axe und $2b$ zur kleinen Axe hat, in unendlich kleine Rechtecke getheilt. Jedes der Ellipse zugehörige Rechteck verhält sich zu dem entsprechenden Kreisrechtecke wie $b : a$, also auch die Summe der einen Rechtecke [der Ellipseninhalt] zur Summe der andern Rechtecke [dem Kreisinhalte] wie $b : a$. Da nun der Inhalt des Kreises $= \pi a^2$ ist, so folgt: Der Inhalt der Ellipse mit den Halbaxen a und b ist $= \pi a b$, wo π die Ludolphische Zahl ist.

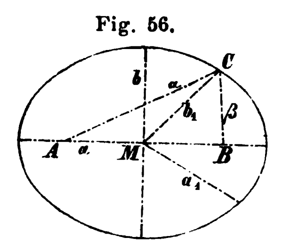
Nach dem Vorigen gehört zu jedem Punkte der Ellipse ein entsprechender desjenigen Kreises, welcher über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser gezogen worden ist, und ebenso findet man zu jedem Punkte dieses Kreises einen entsprechenden auf der Ellipse. In ähnlicher Weise kann zu jedem Durchmesser des Kreises ein entsprechender Durchmesser der Ellipse gezeichnet werden, nämlich derjenige, dessen Endpunkte den Endpunkten des Kreisdurchmessers entsprechen. Seien jetzt zwei senkrecht zu einander stehende Kreisdurchmesser gegeben, so sind die Tangenten in den Endpunkten des einen dem andern parallel. Diese Eigenschaft haben auch die entsprechenden Ellipsendurchmesser, d. h. diese sind conjugirte Durchmesser der Ellipse. Umgekehrt wird gezeigt, dass irgend einem Paare conjugirter Durchmesser der Ellipse ein Paar Durchmesser des Kreises entsprechen, welche senkrecht auf einander stehen. Daraus folgt, dass zu einem dem Kreise umgeschriebenen Quadrate, dessen Seite gleich dem Durchmesser ist, ein der Ellipse umgeschriebenes Parallelogramm gehört, dessen Seiten zweien conjugirten Durchmessern gleich sind. Wendet man die Schlüsse, welche zur Inhaltsberechnung der Ellipse geführt haben, auf dieses Parallelogramm an, so findet man, dass dessen Inhalt constant und zwar gleich dem Product $4ab$ ist, wo a und b die Halbaxen der Ellipse sind. [Der Inhalt des Quadrates verhält sich nämlich zum Inhalt des Parallelogramms wie $b : a$.] Seien also $2a_1$, $2b_1$ die betrachteten conjugirten Durchmesser, φ der Winkel, den sie mit einander bilden, so ist $4ab = 2a_1 \,.\, 2b_1 \sin\varphi$ oder auch $a_1 b_1 \sin\varphi = ab$.

Wir haben früher den Satz bewiesen: Von irgend einer festen Tangente der Ellipse schneidet jedes beliebige Paar paralleler Tangenten stets solche Stücke ab, deren Rechteck constant, nämlich dem Rechteck unter den aus den Brennpunkten nach dem Berührungspunkt der festen Tangente gezogenen Strahlen

gleich ist. Aus diesem Satze lässt sich ein neuer Zusammenhang zwischen zwei conjugirten Durchmessern und den Axen der Ellipse herleiten.

Seien A und B die Brennpunkte der Ellipse, C einer ihrer Punkte, α und β die Leitstrahlen dieses Punktes, b_1 der halbe durch C gehende Durchmesser, a_1 die Hälfte des ihm conjugirten, so folgt aus dem angegebenen Satze sofort: 1) $\alpha\beta = a_1^2$, da die an die Endpunkte des Durchmessers $2a_1$ gelegten Ellipsentangenten parallel sind und auf der Tangente in C ein Stück abschneiden von der Grösse $2a_1$, dessen Mitte C ist. Nach einem elementaren Satze hat man aber 2) $\alpha^2 + \beta^2 = 2c^2 + 2b_1^2$, wo c die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse ist. Durch Combination von 1) und 2) erhält man $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 2c^2 + 2a_1^2 + 2b_1^2$. Es ist nun $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 = (2a)^2$, demnach $4a^2 - 2c^2 = 2a_1^2 + 2b_1^2$. Nimmt man noch die Relation zu Hülfe $a^2 = b^2 + c^2$, so folgt 3) $a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2$, oder auch: Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser der Ellipse ist constant, und zwar gleich der Summe der Quadrate der Axen.

Fig. 56.



Nachdem in diesem Paragraphen bereits gezeigt worden ist, wie aus der Lage und Grösse zweier conjugirter Durchmesser die Richtung der Axen gefunden werden kann, so soll nun noch mit Hülfe der beiden zuletzt bewiesenen Sätze die Grösse der Axen berechnet und construirt werden. Man hat $a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2$, $ab = a_1 b_1 \sin\varphi$, also auch

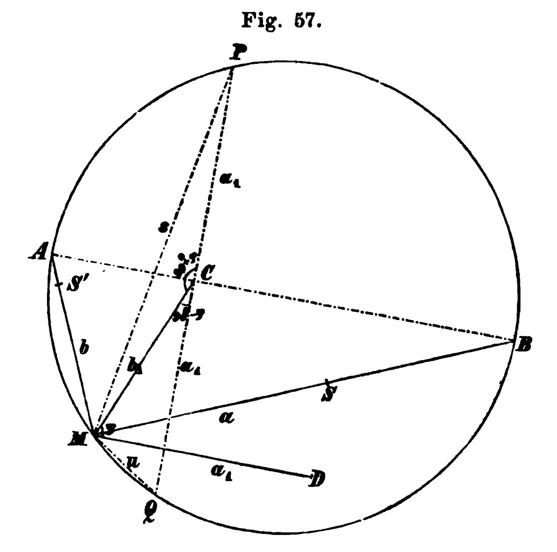
$$(a + b)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin\varphi$$

und in ähnlicher Weise $(a - b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin\varphi$. Aus der Summe und der Differenz der Axen können diese selbst leicht berechnet werden. Die Construction wird wie folgt ausgeführt: $MC = b_1$ und $MD = a_1$ seien die Hälften der gegebenen conjugirten Durchmesser, φ der von ihnen eingeschlossene Winkel. Durch C ziehe man eine Parallele zu MD, so ist diese die Tangente in C an die Ellipse; eine in C senkrecht auf sie gezogene Gerade ist die zugehörige Normale. Trägt man auf dieser nach beiden Seiten von C die Strecke a_1 nach P und Q ab, so ist $MP = s$ gleich der Summe $a + b$ der gesuchten Axen

und $MQ = u$ gleich der Differenz $a - b$. In der That ist im Dreieck MPC: $s^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos(90^0 + \varphi)$
$= a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 \sin\varphi = (a+b)^2$ und im Dreiecke MQC:

$$u^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos(90^0 - \varphi)$$
$$= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \sin\varphi = (a-b)^2.$$

Fig. 57.



Aus s und u werden a und b sofort construirt, indem $s + u = 2a$, $s - u = 2b$ ist. Die Richtung der Axen wird, wie bewiesen worden ist, durch den Kreis PMQ gegeben, dessen Durchschnitte A und B mit der Tangente in C den Axen angehören.

Viertes Kapitel.

Die Hyperbel.

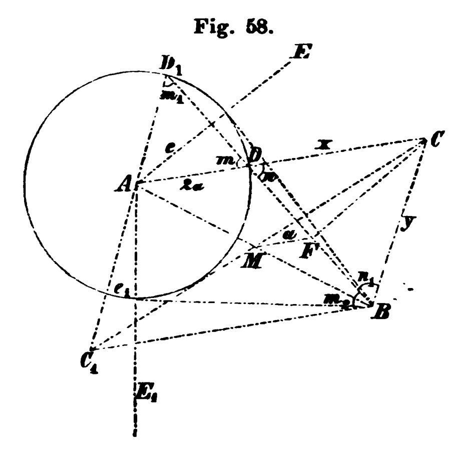
§ 14. Erzeugung der Hyperbel durch Punkte und Tangenten.

Die Betrachtung der Hyperbel kann mit derjenigen der Ellipse in nahe Uebereinstimmung gebracht werden: man darf nur von Zufälligkeiten und Einzelnheiten abstrahiren, um die Eigenschaften beider Curven gleichlautend aussprechen zu können. Wie in der elementaren Geometrie der Satz von der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis verschieden ausgesprochen wird, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, so verhält es sich mit den meisten Sätzen von den Kegelschnitten, die gar keiner oder nur geringer Modificationen bedürfen, um sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel zu gelten. Indess sollen hier nicht Schritt für Schritt die abgeleiteten Ellipsensätze auf die Hyperbel übertragen werden, sondern die Aufmerksamkeit soll sich hauptsächlich auf Eigenschaften richten, die für beide Curven verschieden sind und den wesentlichen Unterschied zwischen ihnen bilden.

Ist C irgend ein Punkt der Hyperbel, und zwar desjenigen Zweiges, welcher den Brennpunkt B umschliesst, so ist $x - y = 2a = AC - BC$. Wird von AC, von dem Punkte A aus, $AD = 2a$ abgeschnitten und BDD_1 gezogen, so ist $CB = CD$, also $\triangle\, BCD$ gleichschenklig und der Ort des Punktes D ein Kreis A mit dem gegebenen Radius $= 2a$. Dieser Kreis nun dient als Leitlinie zur Beschreibung durch die Spitze des Dreiecks: Ein Kreis A und ein ausserhalb liegender Punkt B sind gegeben. Ein gleichschenkliges Dreieck BCD bewegt sich so, dass der eine Schenkel CD sich um den Mittelpunkt A des Kreises dreht,

der eine Endpunkt D der Grundlinie die Kreislinie durchläuft und der andere in jenem Punkte B fest bleibt. Die Spitze C des Dreiecks beschreibt den einen Zweig der Hyperbel, welche A und B zu Brennpunkten, und den Radius des Kreises A zur

Fig. 58.



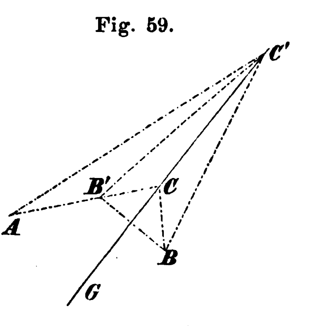
grossen Axe hat, und zwar denjenigen Zweig, welcher den Brennpunkt B umschliesst. Diese Erzeugungsweise ist nichts anderes, als die bereits in § 9 gegebene, woraus folgt, dass auch Ellipse und Parabel in ähnlicher Weise erzeugt werden können.

Will man einzelne Punkte der Hyperbel construiren, so ergibt sich das folgende, allerdings etwas unbequeme Verfahren: Man zieht aus A (oder B) einen Strahl AC, nach seinem Durchschnitt D mit dem Kreis A die Gerade BD, trägt den Winkel D bei B an dieselbe ab, so gewinnt man den Punkt C. Oder: aus B die Sekante BDD_1, sodann die Strahlen ADC und D_1AC_1, sofort die Winkel bei D und D_1 an B getragen, so hat man C und C_1 in verschiedenen Zweigen der Hyperbel und zwar Endpunkte eines Durchmessers CMC_1, denn $\sphericalangle\, n = m = m_1 = m_2 = n_1$, daher $ACBC_1$ ein Parallelogramm, in welchem sich bekanntlich die Diagonalen gegenseitig halbiren. Dreht sich also die Sekante BD_1 um B, so bewegen sich die gleichschenkligen Dreiecke BCD und BC_1D_1 zugleich, und ihre Scheitel C und C_1 beschreiben gleichzeitig beide Zweige der Hyperbel und sind stets die Scheitel eines Durchmessers derselben. Wird die Sekante zur Tangente, so vereinigt sich D mit D_1 in E oder E_1, so wie x und x_1 in e oder e_1 und dann wird $x \parallel y$, daher C und C_1 ent-

gegengesetzt unendlich entfernt, das eine Mal in der Richtung e, das andere Mal in der Richtung e_1. Hiernach hätte die Hyperbel scheinbar vier unendlich entfernte Punkte, also nach einer früher eingeführten Bezeichnungsweise (§ 6) mit der unendlich entfernten Geraden vier Punkte gemein, während in § 8 bewiesen worden ist, dass eine Gerade mit der Hyperbel höchstens zwei Punkte gemein haben kann. Der Widerspruch hebt sich, indem man bedenkt, dass auf einer Geraden nur ein unendlich entfernter Punkt angenommen wird, und dass parallele Geraden denselben unendlich entfernten Punkt haben. Die Hyperbel hat also nur zwei unendlich entfernte Punkte, welche auf den Asymptoten liegen.

Die Hyperbel theilt die Ebene in drei unendliche Räume, von denen zwei je einen Brennpunkt enthalten und von der Hyperbel eingeschlossen werden, während der dritte von der Hyperbel ausgeschlossen wird. In diesem letztern Raum ist, wenn x und y die Leitstrahlen eines beliebigen Punktes nach den Brennpunkten A und B der Hyperbel bezeichnen, $x - y < 2a$, für die Punkte der Hyperbel selbst hat man $x - y = 2a$ und für die erstgenannten beiden Räume hat man $x - y > 2a$, wenn auf das Vorzeichen keine Rücksicht genommen wird. Wenn man an die Hyperbel eine Tangente legt [eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein hat], so kann diese nie in einen Theil der Ebene eintreten, der einen Brennpunkt einschliesst. Demzufolge hat, in Anbetracht aller Punkte der Hyperbeltangente, der Berührungspunkt, der auf der Hyperbel selbst liegt, ein Maximum des Ausdrucks $x - y$. Seien G die Tangente, A und B die Brennpunkte (zwischen denen G hindurchgeht), dann erhält man den Berührungspunkt C, indem man den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf G construirt und den Durchschnitt der Geraden AB' mit G bestimmt. In der That ist für diesen Punkt C die Differenz $x - y = AC - CB = AC - CB' = AB'$. Sei nun aber C' ein anderer Punkt von G, so ist $AC' - C'B = AC' - C'B'$ und weil $AC' < AB' + B'C'$, so ist $AC' - B'C' < AB'$, woraus folgt, dass die Differenz $x - y$ für den Punkt C wirklich

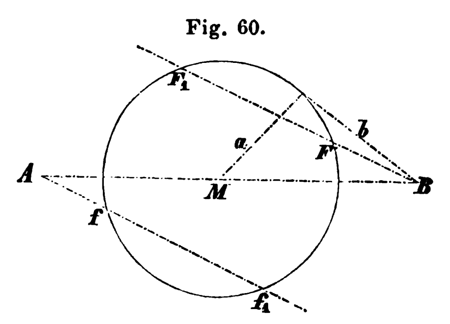
Fig. 59.



ein Maximum ist. — Der Punkt C liegt auf der Hyperbel, also ist $AC - CB = AB' = 2a$, d. h. construirt man den Gegenpnnkt B' des Brennpunktes B in Bezug auf eine beliebige Tangente der Hyperbel, so liegt derselbe auf einem Kreise, welcher mit einem Radius gleich der grossen Axe der Hyperbel um den Brennpunkt A beschrieben ist. Es ist ferner klar, dass G mit AC und CB gleiche Winkel bildet, d. h. die Tangente im Punkte C bildet gleiche Winkel mit den Leitstrahlen AC, CB nach den Brennpunkten A und B. Aus diesen Bemerkungen folgt sofort: Ein Kreis A und ein Punkt B ausserhalb sind gegeben; aus diesem zieht man Gerade BDD_1, die jenen schneiden, hälftet ihre Abschnitte BD, BD_1 mittelst darauf senkrechter Geraden FC, F_1C_1, so ist deren Ort eine Hyperbel, welche A und B zu Brennpunkten hat, und deren Hauptaxe gleich dem Radius des Kreises A ist; und zwar sind FC, F_1C_1 stets Tangenten in den Scheiteln eines Durchmessers der Hyperbel. Für die Grenzfälle der Geraden BD, wo sie BE oder BE_1 ist und den Kreis A berührt, liegt der Berührungspunkt C oder C_1 der Tangente unendlich entfernt, und die Tangente geht durch M, d. h. sie ist Asymptote, [vergl. Fig. 58.]

Da $MF \parallel AD$, so ist $MF = a = MF_1$, folglich der Ort von F und F_1 ein Kreis M mit dem Radius a, also: Fällt man aus den Brennpunkten B und A einer Hyperbel Perpendikel auf ihre Tangenten, so ist der Ort der Fusspunkte F, F_1 und f, f_1 ein Kreis, welcher über die Hauptaxe der Hyperbel als Durchmesser beschrieben worden ist. Ferner: Zieht man aus zwei Punkten

Fig. 60.

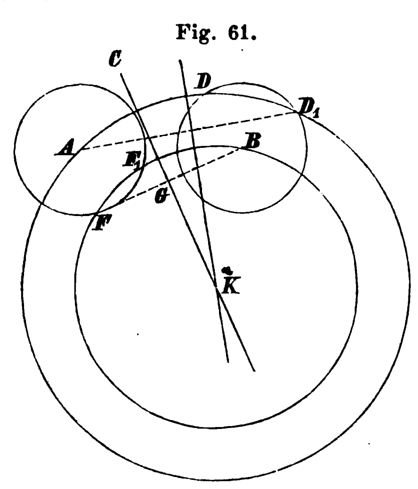


A und B, die ausserhalb eines Kreises M, aber mit seinem Mittelpunkt in einer Geraden liegen und gleichweit von ihm entfernt sind, parallele Gerade Aff_1 und BFF_1, so bestimmen die Durch-

schnittspunkte zwei paralleler Geraden fF_1, f_1F, welche als Tangenten eine Hyperbel beschreiben. Jedes solche Paar Tangenten berührt die Hyperbel in den Endpunkten eines Durchmessers. [Die Elemente der Hyperbel sind leicht zu bestimmen; der Durchmesser des Kreises ist die grosse Axe, A und B sind die Brennpunkte.] Man kann auch sagen: Bewegt sich der Scheitel F eines rechten Winkels in einem festen Kreise M, und geht der eine Schenkel FB stets durch einen festen ausserhalb M liegenden Punkt B, so beschreibt der andere Schenkel Ff_1 eine Hyperbel, welche mit M conzentrisch und B zum Brennpunkt hat. — Da $BF \cdot BF_1 = Af \cdot Af_1 = b^2$, so ist folgender Satz bewiesen: Fällt man aus beiden Brennpunkten Lothe auf eine und dieselbe Tangente Ff_1 der Hyperbel, oder aus einem Brennpunkt auf ein Paar paralleler Tangenten, so ist der Inhalt des Rechtecks unter den Lothen constant, und zwar für beide Fälle von der Grösse b^2, also unabhängig von der Richtung und Lage der Tangenten.

Aus der Construction der Tangente CG in einem Punkte C der Hyperbel ist das Verfahren abzusehen, wie durch einen beliebigen, ausserhalb der Hyperbel liegenden Punkt K Tangenten an dieselbe zu ziehen sind.

Fig. 61.

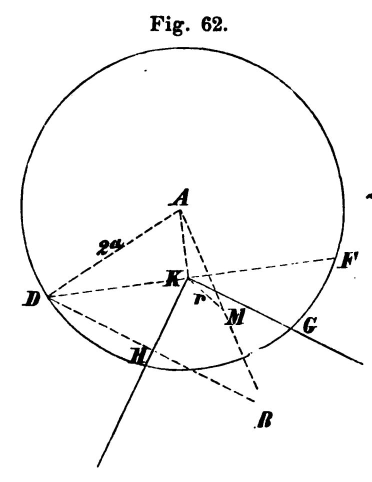


Denn da die Tangente CGH der Ort gleicher Abstände ist für B und einen bestimmten Punkt F im Kreise A, und für A und einen bestimmten Punkt D im Kreise B, so folgt, dass für

6*

jeden Punkt K in der Tangente jene Punkte F und D rückwärts bestimmt und dadurch zu finden sind, dass aus K Kreise durch B oder A beschrieben werden, welche jene gegebenen Ortskreise um A und B beziehlich in F und D schneiden. Allein sie schneiden dieselben auch noch in F_1 und D_1, woraus folgt, dass im Allgemeinen zwei Tangenten durch den angenommenen Punkt K gehen, wovon die eine BF, und die andere BF_1 und AD_1 senkrecht hälftet. Schneiden die Kreise einander nicht, was r beide Paare zugleich eintritt, so folgt dass K innerhalb der perbel liegt und dass keine Tangente möglich ist; berührt sich as eine Paar, so thut das andere ein Gleiches, K liegt dann in der Hyperbel selbst und ist zugleich der Berührungspunkt der einzigen durch ihn gehenden Tangente. Um zu unterscheiden, ob die beiden Tangenten, welche von einem Punkte K ausserhalb der Hyperbel an dieselbe gezogen werden, auf demselben oder auf verschiedenen Zweigen berühren, dient Folgendes: Durch die Asymptoten wird der ausserhalb der Hyperbel liegende Raum in vier Theile getheilt, und diese geben leicht die Entscheidung. Liegt K zwischen den Asymptoten und der Hyperbel, so gehen beide Tangenten an denselben Zweig, liegt K im äussern Asymptotenwinkel, so liegen die Berührungspunkte auf verschiedenen Zweigen. Der Berührungspunkt einer Asymptote kann sowohl auf dem einen als dem andern Zweige angenommen werden.

Fig. 62.



Da die Tangente CG auf dem zugehörigen Strahl BF senkrecht steht, so ist es leicht zwei Tangenten zu finden, die einen gegebenen Winkel α mit einander bilden, denn eben diesen Winkel schliessen die zugehörigen Strahlen aus B oder A ein. Soll insbesondere der Winkel α ein Rechter sein, so kann der Ort von K verlangt werden. Da auch der Winkel der zugehörigen Strahlen ein Rechter sein muss, so ist klar, dass die Forderung nicht immer zu erfüllen ist, sondern nur so lange, als der Tangentenwinkel (tt_1)

aus B an den Kreis A grösser als ein Rechter ist; ist er $= R$, so gibt es nur ein Paar rechtwinkliger Tangenten, nämlich die Asymptoten, und dann ist der Ort von K auf M beschränkt und die Hyperbel ist gleichseitig, und ist er drittens $< R$, so ist die Forderung unmöglich, und diess findet also statt, wenn der Winkel (tt_1) spitz, mithin der Asymptotenwinkel $\pi - (tt_1)$ stumpf ist oder $b > a$.

Es seien die Tangenten KG und KH zu einander rechtwinklig, so ist auch der Winkel $GBH = R$ und daher der Strahl $BH \parallel GK$, $BG \parallel KH$ und folglich, da G und H die Mitten der Strahlen BF und BD sind, liegt K in der Mitte der Geraden DF. Also ist, weil $AD = AF$ und $KD = KF$, AK senkrecht auf DF und $AK^2 + BK^2 = 4a^2 = 2r^2 + 2c^2$, und demzufolge schliesslich $r^2 = a^2 - b^2$, d. h.: der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel eine gegebene Hyperbel berühren, ist ein Kreis, welcher mit der Hyperbel conzentrisch ist, und dessen Radius $r = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist. Auch hieraus erkennt man, dass für die gleichseitige Hyperbel der Kreis sich auf einen Punkt reduzirt, während er für Hyperbeln mit stumpfem Asymptotenwinkel unmöglich wird.

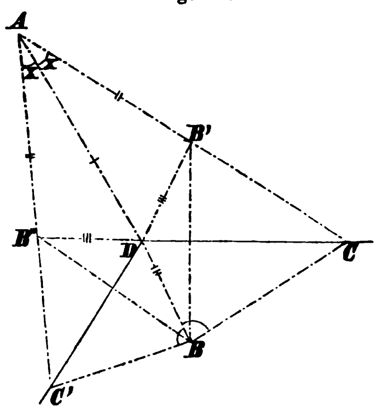
Diese Betrachtung ergibt unmittelbar folgende Sätze: Dreht sich ein rechter Winkel um einen festen Punkt B und schneiden seine Schenkel einen festen Kreis A, der B nicht umschliesst, so ist der Ort der Mitten aller Sehnen, welche Schnittpunkte kreuzweise verbinden, ein bestimmter Kreis M, dessen Mittelpunkt die Mitte von AB ist. Alle diese Sehnen sind zudem Tangenten einer bestimmten Hyperbel. Ferner: Liegen zwei Gegenecken eines Rechteckes in einer gegebenen Kreislinie M und die dritte in einem festen Punkte ausserhalb des Kreises, so ist der Ort der vierten Ecke ein zweiter Kreis M.

§ 15. Betrachtung von zwei und mehr Hyperbeltangenten.

Aus dem Satze, dass die Gegenpunkte eines Brennpunktes in Bezug auf alle Tangenten einer Hyperbel ein Kreis mit dem andern Brennpunkte als Mittelpunkt und der grossen Axe als Radius ist, lassen sich mehrere bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Seien CD, C_1D zwei Tangenten mit den Berührungspunkten C und C_1, die auf demselben Zweige der Hyperbel liegen mögen, D ihr Durchschnittspunkt, so kann man die Gegenpunkte

B' und B'' von B in Bezug auf diese beiden Tangenten bestimmen. Es sind dann die Dreiecke $AB'D$ und $AB''D$ congruent, da AD sich selbst gleich, $AB' = AB'' = 2a$ und $DB' = DB = DB''$ ist, also hat man $\sphericalangle\ B'AD = B''AD$ oder auch $\sphericalangle\ CAD = C'AD$. Ebenso lässt sich beweisen, dass auch $\sphericalangle\ CBD = C'BD$ ist, indem man einfach die Gegenpunkte von A in Bezug auf die beiden gegebenen Tangenten zu Hülfe nimmt. Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn die Tangenten CD

Fig. 63.

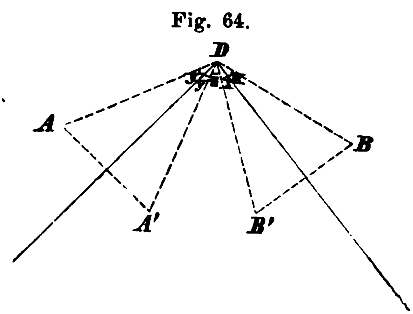


und $C'D$ an verschiedene Zweige der Hyperbel gelegt werden. In Rücksicht der Winkel bei A hat man in diesem Falle immer noch $\triangle\ AB'D \cong AB''D$, also $\sphericalangle\ B'AD = B''AD$, aber der Strahl AD halbirt nun nicht den Winkel CAA', sondern seinen Nebenwinkel $B'AB''$. Dasselbe gilt natürlich auch in Bezug auf den Brennpunkt B, man hat also den Satz: Zieht man von einem Brennpunkte aus Strahlen nach den Berührungspunkten und dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten der Hyperbel, so halbirt der letztere Strahl entweder den Winkel zwischen den beiden ersten, oder aber dessen Nebenwinkel, je nachdem die beiden Tangenten an denselben oder an verschiedene Zweige der Hyperbel gehen.

Wir ziehen von einem Punkte D aus zwei Tangenten an die Hyperbel DC' und DC, ferner von demselben Punkte D die Strahlen nach den Brennpunkten. Bestimmt man den Gegenpunkt A' von A in Bezug auf DC', so ist $\sphericalangle\ ADC' = C'DA' = y$ und ebenso, wenn B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf CD

ist, $\sphericalangle B'DC = CDB = x$. Nun sind die Dreiecke $AB'D$ und $A'DB$ congruent, da $AD = A'D$, $BD = B'D$ und $AB' = A'B = 2a$, also sind die Winkel ADB' und $A'DB$ einander gleich und man hat $z + 2y = z + 2x$ oder $x = y$. In unserer Figur sind die

Fig. 64.



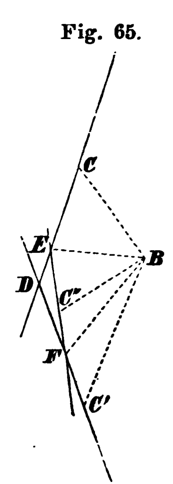
beiden Tangenten an denselben Zweig gezogen worden; wäre diess nicht der Fall gewesen, so hätten geringe Modificationen eine analoge Beziehung ergeben, die mit der bereits aufgestellten sich zu dem folgenden Satze vereinigen lässt: Zieht man von den beiden Brennpunkten einer Hyperbel aus Strahlen nach den Durchschnittspunkten zweier Tangenten derselben, so sind die Winkel, welche diese Strahlen mit den Tangenten bilden, und zwar je mit derjenigen Richtung derselben, die nach dem Berührungspunkte geht, einander gleich, sobald die beiden Tangenten an verschiedene Zweige der Hyperbel gehen, und sie ergänzen sich zu zwei Rechten, wenn beide Tangenten an denselben Zweig gelegt sind.

Tritt zu zwei festen Tangenten eine dritte bewegliche, so gilt folgender Satz: Der Winkel, unter dem das zwischen zwei festen Tangenten befindliche Stück einer dritten beweglichen Tangente von einem Brennpunkte aus gesehen wird, ist constant, so lange die bewegliche Tangente nicht einer der festen parallel wird, ohne dass sie mit ihr zusammenfällt; er springt hingegen in den Nebenwinkel um, so oft der erwähnte Umstand eintritt. Gehen die zwei festen Tangenten an denselben Hyperbelast, so ist dieser Winkel die Hälfte von dem convex oder concav genommenen Winkel, den die vom Brennpunkte B nach den Berührungspunkten der zwei festen Tangenten gehenden Strahlen mit einander bilden. Gehen die zwei festen Tangenten an verschiedene Hyperbeläste, so ist der genannte Winkel gleich dem

halben concav oder convex genommenen Nebenwinkel desjenigen, unter dem die Berührungssehne der zwei festen Tangenten erscheint.

Seien in der That CD und $C'D$ die beiden festen Tangenten mit den Berührungspunkten C und C', ferner $EC''F$ die bewegliche Tangente mit dem Berührungspunkte C'', so ist $\sphericalangle CBE = C''BE$ und $C'BF = C''BF$, also $CBE + C'BF = C''BE + C''BF = EBF = \frac{1}{2}\,CBC'$. Daraus folgt nun, dass in irgend einem der Hyperbel umschriebenen Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten von einem Brennpunkte aus entweder unter gleichen Winkeln gesehen werden, oder aber unter solchen, die sich zu zwei Rechten ergänzen.

Fig. 65.

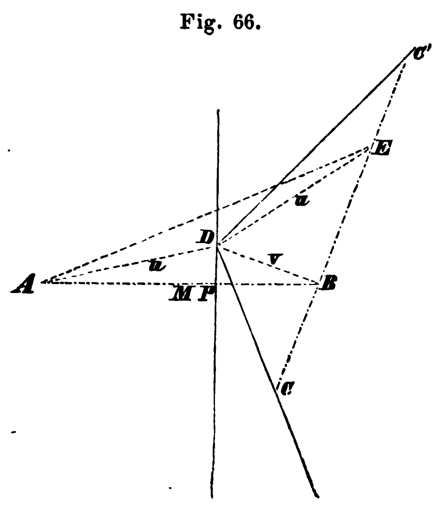


Wenn in dem vorhin bewiesenen Satze die Berührungssehne CC' der beiden festen Tangenten durch den einen Brennpunkt geht, so erscheint das zwischen diesen Tangenten liegende Stück einer dritten Tangente vom Brennpunkte aus unter rechtem Winkel und der von dem Brennpunkte aus nach dem Durchschnittspunkte der beiden festen Tangenten gezogene Strahl steht senkrecht auf der Berührungssehne, denn es ist $DBC = DBC' = \frac{1}{2}\,CBC'$.

Wir ziehen aus dieser Bemerkung folgenden Schluss: Wenn CD und $C'D$ zwei Tangenten sind, deren Berührungssehne durch B geht, so liegt der Gegenpunkt des Brennpunktes A in Bezug auf die Tangente CD in der Berührungssehne CC'. Sei E dieser Gegenpunkt, so ist $AD = DE = u$, $DB = v$, ferner ist nach Früherem $BE = 2a$ und da DEB ein rechtwinkliges Dreieck ist, so hat man $u^2 - v^2 = (2a)^2$, d. h. der Punkt D liegt derart, dass die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B constant ist. Unter Berücksichtigung des geometrischen Ortes in § 7, 4 folgt daher der Satz: Zieht man durch einen Brennpunkt B der Hyperbel beliebige Sehnen, und construirt den Durchschnittspunkt derjenigen Tangenten, welche je in den Endpunkten einer solchen Sehne die Hyperbel berühren, so liegen diese Durchschnittspunkte alle in einer Geraden, welche auf der Hauptaxe senkrecht steht. Diese Gerade heisst Leitlinie der Hyperbel in Bezug auf den Brennpunkt B; aus Gründen der

Symmetrie ergibt sich sofort, dass auch für den Brennpunkt A eine Leitlinie existiren muss. Die beiden Leitlinien laufen parallel unter sich und mit der Nebenaxe, und jede hat von dem Mittel-

Fig. 66.



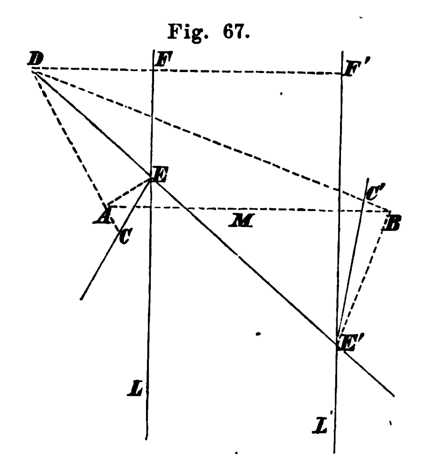
punkte M die Distanz $\frac{a^2}{c}$. Sei nämlich P der Durchschnittspunkt der zu B gehörigen Leitlinie mit der Hauptaxe, so ist $PA^2 - PB^2 = (2a)^2$, $PA + BP = 2c$, also durch Division $PA - PB = 2PM = \frac{2a^2}{c}$ und $PM = \frac{a^2}{c}$; man findet ferner leicht $PA = c + \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 + a^2}{c}$ und $PB = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$.

Der umgekehrte Satz: Dass für jeden Punkt einer Leitlinie die Berührungssehne der von ihm aus an die Hyperbel gezogenen Tangenten durch den zugehörigen Brennpunkt geht, bedarf keines Beweises.

Wenn D ein Punkt der Hyperbel auf dem den Brennpunkt A umschliessenden Zweige ist, so wird die Gerade DA auf demselben Zweige einen Punkt C, und DB auf dem andern B umschliessenden Zweige einen Punkt C' ergeben. Die Hyperbeltangenten in C und D schneiden sich auf der zu A gehörigen Leitlinie L in einem Punkte E, die Tangenten in D und C' aber in einem Punkte E' der zu B gehörigen Leitlinie L'. Jetzt sind die Dreiecke DAE und DBE' ähnlich, denn die Winkel bei D sind einander gleich, weil die Hyperbeltangente den Winkel der Leit-

strahlen DA und DB hälftet, und die Winkel bei A und B sind, wie bewiesen worden, Rechte; demnach ist $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DE'}$. Legt man durch D eine Parallele zu AB, welche L und L' in F und F' treffen möge, so ist $\frac{DE}{DE'} = \frac{DF}{DF'}$, also auch $\frac{DA}{DB} = \frac{DF}{DF'}$ oder $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DF'} = \frac{DB - DA}{DF' - DF}$. Nun ist $DB - DA = 2a$ [nach der Fundamentaldefinition der Hyperbel] und $DF' - DF = FF' = \frac{2a^2}{c}$

Fig. 67.



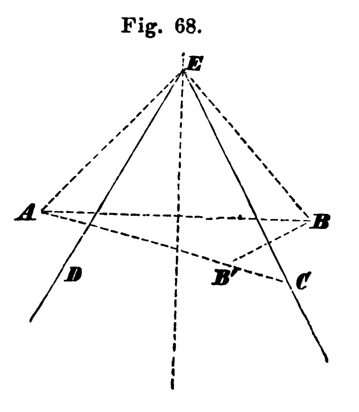
[gleich dem doppelten Abstande einer der Leitlinien vom Mittelpunkte der Hyperbel], also $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DF'} = \frac{c}{a}$, d. h. für jeden Punkt der Hyperbel steht der Abstand von einem Brennpunkte zum Abstand von der zugehörigen Leitlinie in einem constanten Verhältniss.

Ist die Berührungssehne zweier Tangenten die grosse Axe, so geht dieselbe durch die beiden Brennpunkte, und wir haben somit zufolge eines frühern Satzes: Legt man Tangenten an die Scheitel der Hauptaxe, so erscheint das zwischen ihnen liegende Stück irgend einer dritten Tangente von beiden Brennpunkten aus unter rechtem Winkel; wenn man also einen Kreis über diesem Stück als Durchmesser schlägt, so geht derselbe durch die beiden Brennpunkte. Schlägt man deshalb eine Kreisschaar durch zwei feste Punkte A und B, nimmt dann zwischen denselben zwei äquidistante Gerade L und L', welche senkrecht zu AB stehen, und verbindet von den vier Punkten, in denen die-

selben jeden Kreis schneiden, je zwei diametral gegenüberstehende, so umhüllen die sich ergebenden Geraden eine Hyperbel, deren Brennpunkte in A und B und deren Scheitel in L und L' liegen. Der Grenzfall, wenn der Kreis die Strecke AB zum Durchmesser hat, gibt die Asymptoten. Nimmt man die Geraden L und L', ausserhalb A und B, so gibt dieselbe Construction eine Ellipse, und wenn L und L' resp. durch A und B selbst gehen, so reduzirt sich das Gebilde auf die beiden Punkte A und B. Man kann ferner ohne Weiteres den Satz aufstellen: Es seien L und L' zwei feste, zu einander parallele Gerade; lässt man nun um irgend einen festen Punkt A einen rechten Winkel drehen, dessen Schenkel resp. von L und L' begränzt werden, so umhüllen die Hypotenusen der so entstandenen rechtwinkligen Dreiecke eine Ellipse oder eine Hyperbel, jenachdem der Punkt A zwischen oder ausserhalb von L und L' gelegen ist; die Scheitel des erzeugten Gebildes liegen auf L und L' und der eine Brennpunkt ist A.

Wenn sich zwei feste Tangenten der Hyperbel in einem Punkte der Nebenaxe schneiden, so wird die Berührungssehne derselben von beiden Brennpunkten aus unter gleichem Winkel gesehen; somit wird das zwischen ihnen liegende Stück einer beweglichen dritten Tangente von beiden Brennpunkten aus entweder ebenfalls unter gleichen Winkeln gesehen, oder aber unter solchen, die sich zu zwei Rechten ergänzen. Man überzeugt sich aber leicht, dass nur der letztere Fall eintreten kann, indem man die bewegliche Tangente mit einer der beiden festen zusammenfallen lässt. Das in Betracht kommende Stück ist dann gleich dem Abstande des Durchschnittspunktes der beiden festen Tangenten von dem Berührungspunkte der einen derselben und man kann den Beweis wie folgt führen: Sei E der Durchschnitt der beiden Tangenten CE und DE, B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf CE, so liegen die Punkte A, B', C in einer Geraden und es ist $\sphericalangle EB'A + EB'C = 180^0$; ferner hat man $\sphericalangle EBC = EB'C$, und da $EB = EB' = EA$, so ist auch

Fig. 68.



$\sphericalangle EAB' = EB'A$ und endlich $EAC + EBC = 180^0$. Dasselbe muss nun für jede beliebige Lage der dritten beweglichen Tangente gelten, da die Winkel in A und in B immer beide zugleich entweder constant bleiben, oder aber in den Nebenwinkel des frühern übergehen. Legt man also durch einen Punkt der Nebenaxe der Hyperbel zwei Tangenten an dieselbe, so erscheint das zwischen denselben liegende Stück einer beweglichen dritten Tangente von den beiden Brennpunkten aus unter zwei Winkeln, die sich zu zwei Rechten ergänzen. Die Endpunkte des genannten Stückes liegen mit den beiden Brennpunkten zusammen auf einem und demselben Kreise; mit dem analogen Satze für die Ellipse verbunden erhält man also folgende Construction von Ellipse und Hyperbel durch ihre Tangenten: Schlägt man eine Kreisschaar durch zwei feste Punkte A und B, zieht durch irgend einen Punkt der Centralaxe zwei feste Strahlen L und L' symmetrisch zu dieser, und verbindet von den vier Punkten, in denen jeder Kreis dieselben schneidet, je die unsymmetrisch gelegenen, so umhüllen die so erhaltenen Verbindungsgeraden eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die Punkte A und B zwischen den beiden Strahlen L und L' oder ausserhalb liegen.

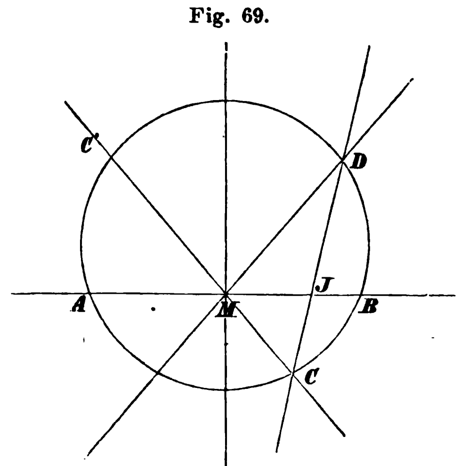
§ 16. Asymptoten und conjugirte Durchmesser. Gleichung der Hyperbel.

Wir haben folgenden Satz bewiesen: „Der Winkel, unter dem das zwischen zwei festen Tangenten liegende Stück einer dritten beweglichen Tangente von einem Brennpunkte aus gesehen wird, ist constant, so lange die bewegliche Tangente nicht einer der festen parallel wird, ohne dass sie mit ihr zusammenfällt; er springt hingegen in den Nebenwinkel um, so oft der erwähnte Umstand eintritt. Gehen die zwei festen Tangenten an denselben Hyperbelast, so ist dieser Winkel die Hälfte von dem convex oder concav genommenen Winkel, den die vom Brennpunkt B nach den Berührungspunkten der zwei festen Tangenten gehenden Strahlen mit einander bilden.“ Setzen wir nun fest, dass die Asymptoten die beiden unveränderlichen Tangenten seien, und kommen im Fernern überein, dass die Asymptoten als denselben Zweig der Hyperbel berührend betrachtet werden sollen, so erscheint die Berührungssehne derselben von den Brennpunkten

aus unter dem Asymptotenwinkel. Es folgt daher unter Berücksichtigung früherer Sätze: Das zwischen den Asymptoten liegende Stück irgend einer dritten Tangente erscheint von den Brennpunkten aus unter Winkeln, deren Summe $= 180^0$ ist, und zwar ist der eine φ, der andere $180^0 - \varphi$, wenn φ den halben Asymptotenwinkel bezeichnet. Sind also die Asymptoten und irgend eine dritte Tangente der Hyperbel gegeben, so kann man dieselbe wie folgt construiren: Man halbire den äussern Winkel der Asymptoten und schlage einen Kreis um das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Hyperbel, dessen Mittelpunkt in der Nebenaxe liegt [welche die Halbirungslinie des äussern Asymptotenwinkels ist]. Wo dieser Kreis die Halbirungslinie des eigentlichen Asymptotenwinkels [die Hauptaxe der Hyperbel] trifft, sind die beiden Brennpunkte. Schlägt man jetzt um A und B eine Kreisschaar, so ergeben die Durchschnittspunkte derselben mit den Asymptoten nach Früherem durch eine einfache Construction die Gesammtheit der Tangenten der Hyperbel.

Es seien jetzt MC und MD die Asymptoten einer Hyperbel, CD eine Tangente derselben, ferner J der Durchschnitt dieser Tangente mit der Hauptaxe, und schliesslich C' der zweite Durch-

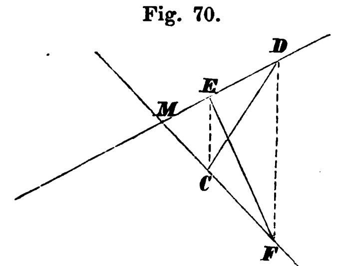
Fig. 69.



schnittspunkt des Kreises $ACBD$ mit der Asymptote MC, so hat man zunächst: $JA.\,JB = JC.\,JD$ d. h. das Rechteck unter den Abschnitten, welche die Hauptaxe auf dem zwischen den Asymptoten liegenden Stück irgend einer Tangente der Hyperbel bildet,

ist gleich dem Rechteck unter den Abschnitten, welche diese Tangente auf der Strecke AB erzeugt. Für jeden beliebigen der Kreise durch AB hat man weiter: $MC. MC' = MA^2 = c^2$, also da $MC' = MD$, auch $MC. MD = c^2$, was den Satz ergibt: Das Rechteck unter den Abschnitten, welche eine bewegliche Tangente der Hyperbel auf den Asymptoten bildet, ist constant, und zwar gleich dem Quadrate über der halben Brenndistanz. Wenn, wie früher, φ der halbe Asymptotenwinkel ist, so ist für jede beliebige Hyperbeltangente die Fläche des Dreiecks $MDC = \frac{1}{2} MC. MD \sin 2\varphi = \frac{1}{2} c^2 \sin 2\varphi$, es ist also der Inhalt des Dreiecks, welches je eine Hyperbeltangente mit den Asymptoten bildet, constant. Sind nun zwei sich schneidende Gerade gegeben, und man trägt in zwei Scheitelwinkeln alle möglichen Dreiecke von gegebenem Inhalte ab, so ergeben die Grundlinien dieser Dreiecke die Tangenten einer Hyperbel, welche die gegebenen Geraden zu Asymptoten hat. Macht man dasselbe an den beiden andern Scheitelwinkeln, so erhält man die conjugirte Hyperbel. Durch diese Bemerkung ist man in den Stand gesetzt, die nachfolgende Aufgabe zu lösen: Gegeben zwei sich schneidende Gerade und ein Punkt. Man soll durch den Punkt eine Gerade legen, welche mit den beiden ersten ein Dreieck von gegebenem Inhalte bildet. Man zeichne, um die Lösung zu construiren, die durch die Grösse des Dreiecks bestimmten conjugirten Hyperbeln, und ziehe vom Punkte, der gegeben ist, Tangenten an dieselben, so sind diese die gesuchten Geraden. Liegt also dieser Punkt in dem von beiden Hyperbeln ausgeschlossenen Theile der Ebene, so sind vier Lösungen vorhanden, liegt der Punkt auf einer der Hyperbeln, so gibt es drei, und wenn der Punkt innerhalb einer der beiden Hyperbeln sich befindet, so erhält man zwei Lösungen der Aufgabe.

Fig. 70.

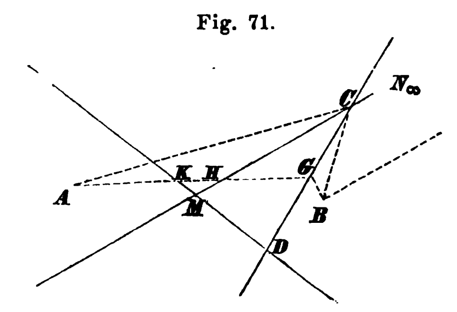


Man kann noch einfacher, als es vorhin geschehen ist, die Tangenten einer Hyperbel verzeichnen, von welcher man die Asymptoten MC und MD und eine Tangente CD kennt. Man lege nämlich durch C und D zwei beliebige parallele Gerade, welche die Asymptoten noch in E und in F treffen mögen, so ist

EF eine neue Tangente der Hyperbel. In der That ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MEC und MDF: $ME : MD = MC : MF$, oder $MC . MD = ME . MF$, d. h. die Dreiecke MEF und MCD haben gleichen Flächeninhalt.

Fasst man die Asymptote MC so auf, als gehe sie mit der Tangente CD an denselben Zweig der Hyperbel, nennt man ferner den Berührungspunkt dieser Asymptote [ihren unendlich entfernten, nach unserer Annahme rechts von MC liegenden Punkt] N und den Berührungspunkt der mit CD bezeichneten Tangente G, so ist $BN \parallel MC$, $\sphericalangle CBG = CBN = BCM$ und nach frühern

Fig. 71.

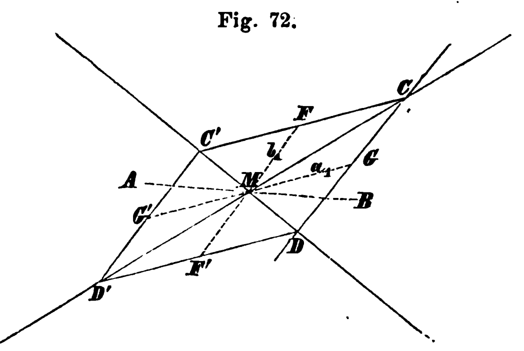


Sätzen: $\sphericalangle BCM = ACG$, also $\sphericalangle CBG = ACG$; ferner ist $\sphericalangle AGC = BGC$ und somit sind die Dreiecke AGC und BGC ähnlich. Daraus folgt nun: $GC^2 = AG . BG$. Durchaus analog wird die Relation $GD^2 = AG . BG$ abgeleitet, aus welcher man in Verbindung der eben gefundenen zieht: $GC = GD$. Das zwischen den Asymptoten liegende Stück irgend einer Tangente der Hyperbel wird vom Berührungspunkte halbirt, und das Quadrat der Hälfte ist gleich dem Rechtecke unter den Leitstrahlen des Berührungspunktes. Da $\sphericalangle ACM = BCG$ und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AGC und BGC auch $\sphericalangle BCG = CAG$ ist, so hat man $\sphericalangle ACH = CAH$, somit $AH = HC$; ebenso wird $AK = KD$ sein, also sind die Dreiecke AHC und AKD gleichschenklige. Diess gibt eine einfache Methode, um an einen beliebigen Punkt G der Hyperbel die Tangente zu ziehen. Man lege durch G den Leitstrahl nach A, welcher die Asymptoten resp. in H und K schneidet, mache $HC = HA$ und $KD = KA$, so ist CD die Tangente im Punkte G. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AGC und GCB folgt auch: $AC : CB = CG : GB$, ebenso wird sein: $AD : DB = DG : GB$; somit, da $CG = GD$, ist

$AC : CB = AD : DB$, woraus ferner, da $ABCD$ ein Kreisviereck und desshalb $AC . DB + CB . AD = AB . DC = 2c . DC$ ist, sich ergibt: $AC . DB = CB . AD = c . CD$.

Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind, wie leicht zu beweisen ist, einander parallel. Aber nicht jeder Durchmesser der Hyperbel schneidet auf derselben zwei Punkte aus [jede durch den Mittelpunkt M gehende Gerade heisst Durchmesser der Hyperbel], so dass also in dem gleichen Sinne wie für die Ellipse keine conjugirten Durchmesser für die Hyperbel existiren. Bei der Ellipse wurden nämlich zwei Durchmesser conjugirte genannt, von denen jeder zu den Tangenten in den Endpunkten des andern parallel war. Diese Definition lässt sich nun, wie man sofort einsieht, nicht unmittelbar auf die Hyperbel

Fig. 72.



übertragen. Man nimmt desshalb die conjugirte Hyperbel zu Hülfe, und nennt zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel solche, von denen jeder parallel ist zu den Tangenten in den Endpunkten des andern, insofern diese Endpunkte das eine Mal auf der Hyperbel selbst, das andere Mal auf der conjugirten Hyperbel gemessen werden. Es seien wiederum CMD' und $C'MD$ die Asymptoten der Hyperbel, CD eine Tangente mit dem Berührungspunkte G [es ist dann $CG = GD$]; diese Elemente bestimmen durch einfaches Ziehen von Parallelen durch C und D mit GM ein Parallelogramm $CC'DD'$. Verlängert man nun GM bis G' und zieht durch M die Parallele FF' zu CD, so ist FF' und GG' ein Paar conjugirter Durchmesser in Bezug auf die Hyperbel. Es ist nun $AG . BG = CG^2 = MF^2$ d. h.: Das Rechteck unter den Leitstrahlen irgend eines Punktes der Hyperbel ist gleich dem Quadrate des halben, diesem Punkte entsprechen-

den conjugirten Durchmessers. Es seien $\alpha = AG$ und $\beta = BG$ die Leitstrahlen des Punktes G, so hat man $\alpha^2 + \beta^2 = 2a_1^2 + 2c^2$; es ist aber $\alpha\beta = b_1^2$, also $(\alpha - \beta)^2 = 2(a_1^2 - b_1^2 + c^2)$, oder da $\alpha - \beta = 2a$ [wo wie immer $2a$ die Hauptaxe der Hyperbel ist], $2a^2 = a_1^2 - b_1^2 + c^2$, und unter Berücksichtigung der Formel $a^2 = c^2 - b^2$, $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, oder in Worten: Die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist constant und gleich der Differenz der Quadrate der Axen. Wie bei der Ellipse, sind auch bei der Hyperbel die Axen ein Paar conjugirter Durchmesser, und zwar kann bewiesen werden, dass sie die einzigen zu einander senkrecht stehenden sind. Um die Bedeutung der Asymptoten zu erkennen, beachte man den Satz: Jedes Paar conjugirter Durchmesser einer Hyperbel ist ein den Asymptoten zugeordnetes harmonisches Strahlenpaar. In der That schneidet die Gerade FG die conjugirten Durchmesser und die Asymptoten in vier harmonischen Punkten, von denen einer in unendlicher Entfernung liegt, während sein zugeordneter sich in der Mitte der beiden übrigen befindet. Man findet also das gesammte System conjugirter Durchmesser der Hyperbel, indem man einfach zu den Asymptoten alle harmonisch zugeordneten Strahlenpaare construirt. Wenn nun von vier harmonischen Strahlen zwei zusammenfallen, so vereinigt sich mit ihnen allemal noch ein dritter, so dass also jede der Asymptoten selbst als ein Paar zusammengefallener conjugirter Durchmesser sich darstellt.

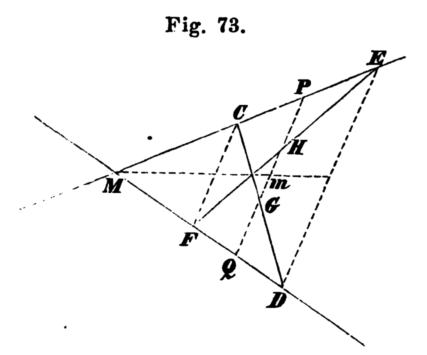
Nennt man G und F conjugirte Punkte der beiden Hyperbeln, und bezeichnet die Leitstrahlen FA_1 und FB_1 [wo A_1 und B_1 die Brennpunkte der conjugirten Hyperbel sind] mit α_1 und β_1, so hat man: $(\alpha_1 + \beta_1) = \alpha + \beta$, wo α und β wie vorhin die Leitstrahlen des Punktes G sind. Es ist in der That $(\alpha + \beta)^2 = 2(a_1^2 + b_1^2 + c^2)$ und aus Symmetriegründen folgt, da ja a_1 und b_1 auch conjugirte Durchmesser der F enthaltenden Hyperbel sind: $(\alpha_1 + \beta_1)^2 = 2(a_1^2 + b_1^2 + c^2)$ [die Brenndistanz $2c$ ist für beide Hyperbeln dieselbe]. Man hat also $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2$ oder $(\alpha + \beta) = (\alpha_1 + \beta_1)$, wie behauptet worden ist.

Die Linie FG wird von der einen Asymptote halbirt, und ist der andern parallel; da nun G ein beliebiger Punkt der einen Hyperbel ist, so haben wir den Satz: Jede Parallele mit der einen Asymptote wird in ihrem Abschnitte zwischen zwei conjugirten Hyperbeln von der andern Asymptote halbirt.

Der Inhalt eines zwei conjugirten Hyperbeln umschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, oder dessen Ecken auf den Asymptoten liegen, ist constant, und zwar gleich $2c^2 \sin 2\varphi$, wo φ den halben Asymptotenwinkel bezeichnet. Man kann daher auch sagen: Wenn in den Winkeln zweier sich schneidenden Geraden ein Parallelogramm von constantem Inhalte sich verschiebt, so umhüllen seine Seiten zwei conjugirte Hyperbeln, welche jene Geraden zu Asymptoten haben. Sind die Hyperbeln gleichseitig, so ist auch das Dreieck MCG rechtwinklig, und ebenfalls von constantem Inhalt, nämlich gleich dem vierten Theil des Dreiecks MCD. Wenn sich also ein rechtwinkliges Dreieck von constantem Inhalt so bewegt, dass der eine spitze Winkel fest ist und der Rechte eine Gerade beschreibt, so durchläuft der andere spitze Winkel eine gleichseitige Hyperbel.

Aus einem frühern Satze folgt, indem man zu zwei an denselben Hyperbelast gehenden Tangenten die Asymptote als dritte hinzufügt: Gehen zwei Tangenten an denselben Hyperbelast, so erscheint die Berührungssehne von einem Brennpunkte aus unter doppelt so grossem Winkel, als das von beiden Tangenten abgeschnittene Stück einer Asymptote. — Seien MC und MF die Asymptoten einer Hyperbel, CD und EF zwei Tangenten derselben

Fig. 73.

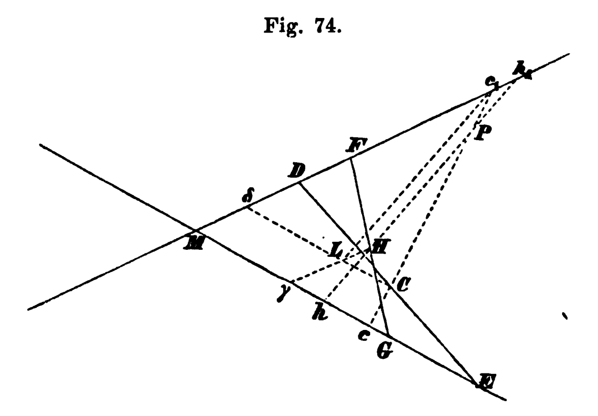


mit den Berührungspunkten G und H, so ist $CF \parallel GH \parallel ED$, wie die elementarsten Betrachtungen erweisen. Wenn die Berührungssehne GH die Asymptoten noch in den Punkten P und Q trifft, so ist noch $PH = GQ$. Schliesslich geht noch die Verbindungsgerade der Mitte m von GH mit M durch den Durchschnitts-

punkt der beiden Tangenten CD und EF. Daran knüpfen sich folgende Sätze: Wenn ein beliebiges Tangentenpaar an die Hyperbel gelegt wird, so werden die von denselben auf den Asymptoten abgeschnittenen Stücke von der Berührungssehne halbirt. — Bei einer Sekante der Hyperbel sind die Stücke zwischen den Asymptoten und der Hyperbel gleich. Wenn daher die Asymptoten gegeben sind und irgend ein Punkt C, so kann man alle andern Punkte der Hyperbel bestimmen, wenn man durch C beliebige Strahlen zieht und auf jedem Strahle von einer Asymptote aus dasjenige Stück abträgt, um welches C von der andern Asymptote entfernt ist. — Von zwei conjugirten Durchmessern halbirt jeder die mit den andern parallelen Sehnen. — Der Durchmesser, welcher ein System paralleler Sehnen halbirt, ist der Ort der Durchschnittspunkte der an die Endpunkte jeder dieser Sehnen gelegten Tangenten.

Auf der Hyperbel wählen wir zwei Punkte C und H, deren zugehörige Tangenten DE und FG sein mögen. Durch P legen wir die Strahlen HP und CP, welche die Asymptoten resp. in h und h_1, c und c_1 treffen mögen. Legt man nun durch C eine

Fig. 74.



Parallele $C\delta$ zu MG und durch c_1 eine Parallele c_1L zu hh_1 so ist $\triangle\, CLc_1 \cong chP$ also $LC = hc$. Es sind aber die Dreiecke LCD und GED ähnlich, und es verhält sich $DC : DE = 1 : 2$, also ist auch $LC : GE = 1 : 2$ oder $hc = \frac{1}{2}\, GE$. In ähnlicher Weise findet man $c_1h_1 = \frac{1}{2}\, FD$. Nimmt man also auf der Hyperbel zwei feste Punkte an, und lässt einen dritten Punkt sich in der

Hyperbel fortbewegen, so bilden die durch die festen Punkte nach dem beweglichen gezogenen Sekanten auf den Asymptoten constante Abschnitte, welche halb so gross sind als die entsprechenden Abschnitte, welche die in den festen Punkten gezogenen Tangenten auf den Asymptoten bilden. Dieser Satz kann benutzt werden, um eine Hyperbel zu construiren, die durch drei gegebene Punkte geht, und eine gegebene Gerade zur Asymptote hat. Seien die Punkte mit C, H, P bezeichnet, so bestimmen die Strahlen PC und PH auf der Asymptote einen Abschnitt ch. Lässt man nun diese constante Länge ch auf der Asymptote fortrücken, so beschreibt der Durchschnittspunkt der Strahlen Cc und Hh die Hyperbel.

Wir wollen zum Schlusse noch angeben, dass in durchaus analoger Weise, wie diess für die Ellipse geschehen ist, auch für die Hyperbel eine Gleichung ihrer Punkte oder ihrer Tangenten in Bezug auf zwei conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen gefunden werden kann. Man erhält, wenn $2a_1$ und $2b_1$ diese conjugirten Durchmesser bezeichnen [wo a_1 derjenige ist, welcher die Hyperbel schneidet, während b_1 seine Endpunkte auf der conjugirten Hyperbel liegen hat] für die Punkte der Hyperbel die Gleichung

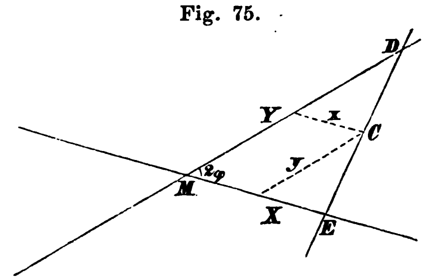
$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

und für die Tangenten der Hyperbel

$$\frac{a_1^2}{X^2} - \frac{b_1^2}{Y^2} = 1,$$

zwei Gleichungen, die sich von den analogen für die Ellipse nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle von b_1^2 getreten ist $-b_1^2$.

Fig. 75.



Man kann auch die Asymptoten zu Coordinatenaxen wählen, in welchem Falle die Gleichung der Hyperbel sowohl in Betracht

ihrer Punkte als auch ihrer Tangenten sehr einfach wird. Sei nämlich C irgend ein Punkt der Hyperbel, DE die zugehörige Tangente, so ist $CD = CE$, ferner $MD = Y = 2y$, und $ME = X = 2x$. Ist nun φ der Asymptotenwinkel, so ist nach Früherm [wenn c die halbe Brennweite ist]

$$XY = c^2 \sin 2\varphi$$

die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Tangenten, und

$$xy = \tfrac{1}{4}c^2 \sin 2\varphi$$

die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Punkte, beidemal die Asymptoten als Coordinatenaxen vorausgesetzt.

Fünftes Kapitel.

Die Parabel.

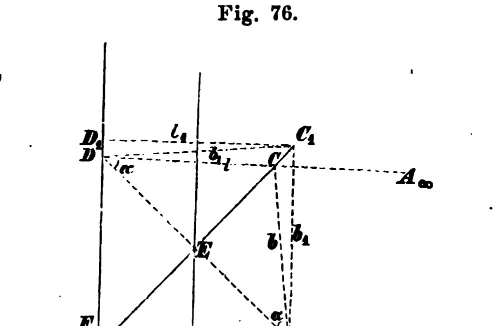
§ 17. Eigenschaften der Parabel in Bezug auf ihre Punkte und ihre Tangenten.

Die meisten Eigenschaften der Parabel lassen sich voraussagen, indem man die Ellipse oder die Hyperbel so spezialisirt, dass sie zur Parabel wird. In der That erscheint die Parabel in mancherlei Rücksicht als Uebergangsfall der beiden genannten Curven, oder umgekehrt, sie erscheint als jede derselben. Desshalb stellen sich die wesentlichsten Eigenschaften der Parabel als Uebergänge dar, und bieten dadurch oft mehr Interesse als im allgemeinen Falle, indem sie einfachere geometrische Erscheinungen zeigen, die durch ihren Zusammenhang mit allbekannten Elementarsätzen überraschen und zugleich zu zahlreichen Folgerungen Anlass geben, die nicht minder anziehend sind, und sich ebensowohl auf die Parabel als auf die mit ihr auftretenden Elementarfiguren für sich betrachtet beziehen.

Hält man bei der Ellipse den Brennpunkt B und den ihm zugehörigen Scheitel S der Hauptaxe fest und lässt letztere wachsen, bis sie unendlich gross wird, so bleiben während dieser Veränderung die früher aufgestellten Eigenschaften der Ellipse ungestört, so dass angenommen werden darf, dass sie auch in jenem Endfalle noch stattfinden, wo die Axe unendlich wird, oder wo die Ellipse in die Parabel übergeht. Dabei entfernen sich offenbar der Mittelpunkt M, der andere Brennpunkt A und der zweite Scheitel S_1 der Hauptaxe zugleich in's Unendliche, ebenso die ganze kleine Axe. Daher werden alle Strahlen, welche aus gegebenen Punkten nach A gehen, mit der Axe SB parallel sein, und ebenso wird der Kreis M, welcher die Axe SS_1 zum Durch-

messer hat, in die Tangente im Scheitel S der Parabel übergehen. Unter diesen veränderten Umständen müssten also die wesentlichsten Sätze über die Ellipse sich darstellen und mit Andeutung derselben sich aussprechen lassen. Z. B.: Die Strahlen aus einem Parabelpunkte C nach den Brennpunkten B, A bilden mit den Tangenten gleiche Winkel und zwar ist der Strahl CA parallel

Fig. 76.



der Axe SS_1. Darauf gründet sich folgende Construction der Tangente in einem Punkte C der Parabel: Man trage auf der Axe vom Brennpunkte B aus nach der Seite der Leitlinie hin das Stück $BG = BC$ ab, so ist GC die gesuchte Tangente. Ferner: Die Strahlen aus dem endlich entfernten Brennpunkte B nach den Berührungspunkten und dem Durchschnitte zweier Tangenten bilden zwei gleiche Winkel, und die Strahlen aus dem unendlich entfernten Brennpunkte nach denselben Punkten laufen in gleichen Abständen. Die Fusspunkte der Perpendikel aus dem vorliegenden Brennpunkt B auf die Tangenten der Parabel liegen in einem unendlich grossen Kreise, welcher die Parabel im Scheitel S berührt, d. h. in der Scheiteltangente. Auch vom Ort des Durchschnittes rechtwinkliger Tangenten weiss man sofort, dass er eine Gerade sein wird, die senkrecht zu der Axe steht, denn der auf der Axe gelegene Durchschnitt zweier rechtwinkliger Tangenten kann offenbar nicht in's Unendliche rücken, wenn die Ellipse in die Parabel übergeht. Der Hülfskreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $2a$ [die gewöhnlichen Bezeichnungen für die Ellipse

vorausgesetzt] trifft die Hauptaxe SS_1 in einem Punkte F, wobei stets $BS = SF$; im Grenzfalle geht also dieser Kreis in die Leitlinie über. Ferner: Der Kreis über dem Durchmesser BF schneidet den Kreis M [über der grossen Axe als Durchmesser] in zwei Punkten, durch welche aus F zwei Tangenten der Ellipse gehen, die allemal zu einander rechtwinklig sind; daher ist die Leitlinie zugleich der Ort der Schnittpunkte der sich rechtwinklig schneidenden Tangenten.

Dieselben Resultate folgen, wenn man von der Hyperbel ausgeht, was nicht näher ausgeführt zu werden braucht.

Zufolge der Definition ist die Parabel der Ort eines Punktes C, welcher von einem festen Punkte B und einer festen Geraden L gleichweit entfernt ist. Es ist also $CD = l = BC = b$, und wenn man den Strahl BD zieht, $\alpha = \alpha_1$. Die Gerade CE, welche 1) den Winkel (bl) hälftet, 2) BD rechtwinklig hälftet und 3) Ortslinie ist des Punktes, der von B und D gleichen Abstand hat, trifft die Parabel nur in einem einzigen Punkte und heisst desshalb Tangente der Parabel im Punkte C, der ihr Berührungspunkt genannt wird. Wäre noch ein zweiter Punkt C_1 der Parabel vorhanden, so wäre $b_1 = l_1 = C_1D$; aber diese letztere Strecke ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck DD_1C_1, also grösser als die Kathete l_1, womit gezeigt ist, dass C_1 kein Punkt der Parabel sein kann.

Der Punkt D heisst der Gegenpunkt der Parabel in Bezug auf die Tangente CG, woraus der Satz folgt: Die Gegenpunkte des Brennpunktes der Parabel in Bezug auf ihre sämmtlichen Tangenten liegen auf der Leitlinie. Da ferner $FS = SB$, und da CG die Strecke DB hälftet, so folgt: dass die Fusspunkte der vom Brennpunkte aus auf sämmtliche Tangenten der Parabel gefällten Perpendikel auf der Scheiteltangente liegen.

Die nachfolgenden Sätze bedürfen nun keines weitern Beweises mehr:

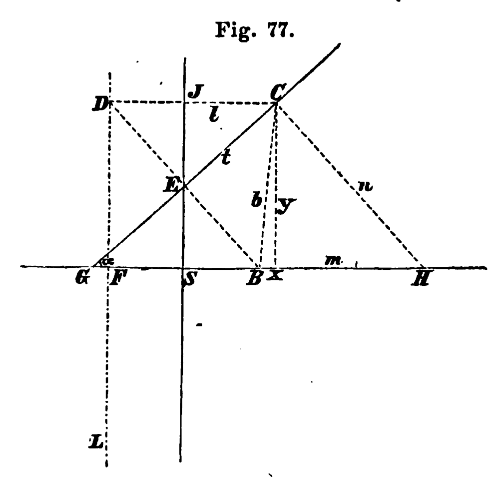
Bewegt sich ein veränderliches gleichschenkliges Dreieck BCD unter der Bedingung, dass der eine Endpunkt B der Grundlinie BD in einem festen Punkte bleibt, und der andere D eine feste Gerade L durchläuft, auf welcher der anliegende Schenkel CD stets senkrecht bleibt, so beschreibt die Spitze eine Parabel, welche die genannten festen Elemente zu Brennpunkt oder Leitlinie hat.

Die gesammten Tangenten der Parabel werden erhalten, wenn man aus B nach L alle möglichen Strahlen BD zieht und jeden durch eine senkrechte Gerade EC hälftet. Diese Gerade beschreibt als Tangente die Parabel.

Geht der eine Schenkel EB eines rechten Winkels BEC stets durch einen festen Punkt B, während sein Scheitel E irgend eine Gerade SE durchläuft, so beschreibt der andere Schenkel als Tangente eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkte und die feste Gerade zur Tangente im Scheitel hat [so dass also das Perpendikel von B auf SE die Axe ist].

An die vorstehenden Betrachtungen schliessen sich leicht mehrere Eigenschaften der Parabel, die man vorzugsweise bei der analytischen Methode zu beweisen und hervorzuheben pflegt. Indem man die Axe der Parabel und ihre Scheiteltangente zu Coordinatenaxen wählt, zieht man aus einem beliebigen Punkte C der Curve die Ordinate y und die Normale $n = CH$, so heissen

Fig. 77.



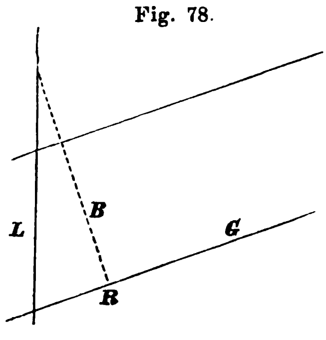
$CG = t$ die Tangente, $Gx = s$ die Subtangente, $xH = m$ die Subnormale und $Sx = x$ die Abscisse. Nun ist $n \parallel BD$, daher $l = BH$, aber da $l = b = BG$ [weil $\beta = \alpha$], so ist $BG = BH$, d. h.: Die Tangente und die Normale schneiden die Axe in gleicher Entfernung von B, und zwar ist diese Entfernung dem zugehörigen Leitstrahle gleich. — Da n gleich und parallel BD, so ist $\triangle BFD \cong HxC$, daher $m = BF$ oder: Die Subnormale für jeden beliebigen Punkt der Parabel ist constant und zwar

gleich dem Abstande des Brennpunkts von der Leitlinie. — Da ferner $b = BG$ und BE senkrecht auf t, so ist $EG = EC$ und folglich sowohl $\triangle ESG \cong EJC$, als auch $\triangle BEG \cong DEC$, daher $SG = JC = x$ und $BG = DC$ (also auch $FG = Bx$), d. h.: das Stück jeder Tangente vom Berührungspunkte C bis zur Axe G wird von der Tangente im Scheitel S gehälftet. Ebenso ergibt sich: die Subtangente Gx wird durch den Scheitel gehälftet, oder sie ist doppelt so gross als die Abscisse. Vermöge des rechtwinkligen Dreiecks GCH ist $y^2 = Gx \, . \, xH$, d. h. $y^2 = 2x \, . \, \frac{1}{2}p = px$, wo p die doppelte Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie ist, und der Parameter der Parabel heisst. Die Relation $y^2 = px$ ist, wie man sich ausdrückt, die Gleichung der Parabel in Bezug auf die Axe und die Scheiteltangente als Coordinatenaxen.

Wir haben gesehen, wie die gesammten Tangenten der Parabel durch die Strahlen aus B (bis an L) bestimmt werden. Diess setzt uns in den Stand, über die Richtung der Tangenten zu verfügen, nämlich Tangenten zu legen, deren Richtung gegeben ist, oder welche einen gegebenen Winkel mit einander einschliessen. Bei allen diesen Aufgaben kann man sich auf die analogen Constructionen für Ellipse und Hyperbel stützen, was die Ableitungen wesentlich erleichtert.

Zunächst lösen wir die Aufgabe, Tangenten an die Parabel zu legen, welche einer gegebenen Geraden G parallel sind, wenn von der Parabel nur der Brennpunkt B und die Leitlinie L vorliegen. Man fälle aus B das Perpendikel BR auf G und halbire den Abschnitt desselben, welcher zwischen B und L liegt, durch eine senkrechte Gerade, so ist diese die verlangte Tangente. Hier tritt die Leitlinie als der Ort der Gegenpunkte des Parabelbrennpunktes in Bezug auf alle Tangenten dieser Curve auf. Aber der Ort der Gegenpunkte besteht aus der Leitlinie und noch einer unendlich entfernten Geraden, wie man sofort einsieht, wenn man für den analogen Fall bei der Ellipse den entsprechenden Ortskreis unendlich gross werden lässt, und bedenkt, dass nach Früherem alle unendlich entfernten Punkte der Ebene so

Fig. 78.

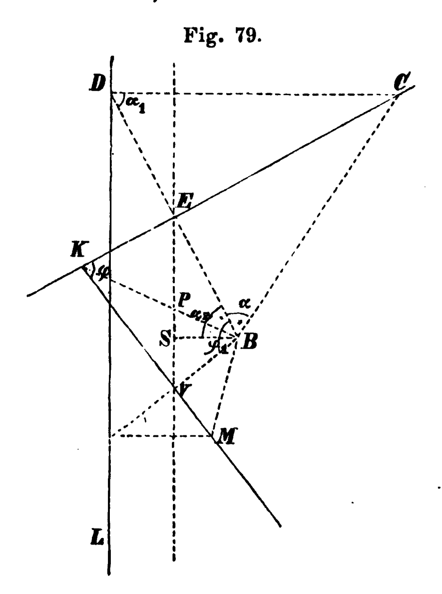


aufgefasst werden können, als ob sie eine einzige Gerade bildeten. Ergänzt man auf Grund dieser Bemerkung die vorhin gegebene Construction, so gelangt man zu dem Satze: Die Parabel hat keine zwei parallelen Tangenten in angebbarer Entfernung, wohl aber ist mit jeder Tangente eine unendlich entfernte parallel. Diese unendlich entfernten Tangenten fallen alle mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene zusammen, diese hat also keine bestimmte Richtung, sondern ist mit jeder beliebigen Geraden der Ebene parallel. — Wird der Strahl BR der Leitlinie parallel, so ist gar keine sichtbare Tangente vorhanden; diess ist aber offenbar der einzige Fall dieser Art. Also: Es gibt nach allen möglichen Richtungen sichtbare Tangenten der Parabel, ausgenommen eine einzige Richtung, nämlich die Richtung der Axe.

Soll eine Tangente mit der gegebenen Geraden G parallel sein, oder sie unter irgend einem gegebenen Winkel φ schneiden, so ist sie, wie das Vorstehende klar zeigt, leicht zu finden.

Es sollen ferner zwei Tangenten gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel φ bilden. Auch dieser Forderung ist

Fig. 79.



eicht zu genügen; nämlich man ziehe aus B zwei Strahlen, deren Winkel φ_1 der Nebenwinkel von φ ist, so sind die zugehörigen Tangenten die verlangten. Oder da der Strahl BD den Winkel

SBC hälftet ($\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$), so nehme man einen Winkel $MBC = 2\varphi$, so geben dessen Schenkel allemal die Berührungspunkte C, M eines Tangentenpaares, welches den gegebenen Winkel einschliesst. Zugleich folgt hieraus, dass der doppelte Winkel φ irgend zweier Tangenten mit demjenigen MBC, welchen die aus dem Brennpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen bilden, zusammen $= 4R$ ist; oder: dass der äussere Winkel irgend zweier Tangenten allemal halb so gross ist, als der Brennpunktswinkel über der Berührungssehne.

Ist insbesondere $\varphi = R$, so ist auch $\varphi_1 = R$ und folglich $MBC = 2R$, oder MBC liegen in einer Geraden. Daraus folgt: Schneiden zwei Tangenten der Parabel einander unter rechtem Winkel, so geht die Berührungssehne CM allemal durch den Brennpunkt B, und umgekehrt, zieht man durch B irgend eine Sehne, und legt in ihren Endpunkten C, M Tangenten an die Parabel, so sind dieselben rechtwinklig zu einander. In diesem Falle, in welchem $\varphi = \varphi_1 = R$ und auch die Winkel bei V und E Rechte sind, ist $BVKE$ ein Rechteck, dessen Diagonalen sich in P hälften, und da EV in der festen Geraden SE liegt, so muss also K [weil $BP = PK$] in L liegen d. h.: der Ort des Durchschnittspunktes K rechtwinkliger Tangenten ist die Leitlinie. Und: Werden aus irgend einem Punkte K in der Leitlinie zwei Tangenten an die Parabel gelegt, so schliessen dieselben allemal einen rechten Winkel ein, und ihre Berührungspunkte C, M liegen mit B in einer Geraden.

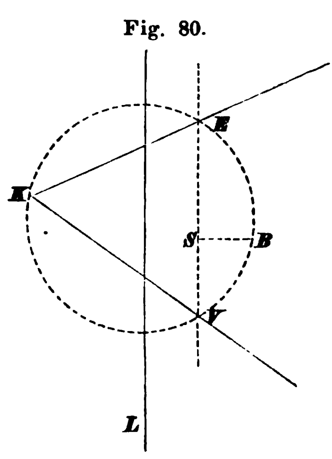
§ 18. Zusammenhang zweier Parabeltangenten.

Soll aus irgend einem Punkte K, welcher ausserhalb der Parabel liegt, eine Tangente an dieselbe gezogen werden, so kann man unter andern auf folgende zwei Arten verfahren:

1) Zufolge des Vorhergehenden erreicht man den Zweck, indem man über dem Strahle BK als Durchmesser einen Kreis errichtet, denn dieser geht durch die Spitzen E, V der rechtwinkligen Dreiecke BEK, BVK, und da dieselben ausserdem in der festen Geraden SJ liegen, so sind sie dadurch bestimmt, und mit ihnen zugleich sind auch die Tangenten KE, KV gefunden. Auch folgt daraus, dass durch einen gegebenen Punkt K im Allgemeinen und höchstens zwei Tangenten der Parabel gehen. [Der Kreis (BK) und die Gerade SJ können sich höchstens

in zwei Punkten schneiden.] Tritt der Fall ein, dass der Kreis (BK) die Gerade SJ berührt, so zeigt diess an, dass nur eine Tangente möglich ist, und dass K in der Parabel liegt, nämlich es fallen dann E und V zusammen und bestimmen mit K nur eine Tangente; und umgekehrt: wird K in der Parabel angenommen, so tritt jenes ein, d. h. so berührt der Kreis (BK) die Gerade SJ. Demzufolge müssen die Kreise, deren Durchmesser BC, BM etc. sind, die Gerade SJ in den Punkten E, V etc. berühren. Man zieht daraus den folgenden Satz: Bei einer Kreisschaar (B, L) welche einen Punkt B und eine Gerade L als Tangente gemein haben, liegen die andern Endpunkte der Durchmesser, welche jenen Punkt B gemein haben, in einer Parabel, deren Brennpunkt B und deren Scheiteltangente L ist; ferner hat diese Parabel alle Geraden, welche den zweiten Endpunkt mit dem Berührungspunkte des jedesmaligen Kreises und L verbinden, zu Tangenten. Trifft es sich, dass der Hülfskreis die Gerade SJ weder schneidet noch berührt, so schliesst man, der Punkt K liege innerhalb der Parabel und auch umgekehrt.

Fig. 80.

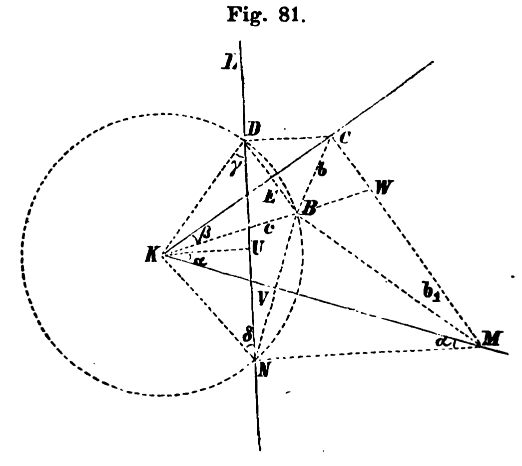


2) Nach Analogie der Ellipse und Hyperbel braucht man blos um K einen durch B gehenden Kreis zu beschreiben, dessen Durchschnitte D, N mit L die Strahlen BD, BN bestimmen, welche den gesuchten Tangenten KE, KV entsprechen [nämlich diese Tangenten sind die Perpendikel aus K auf jene Strahlen]. Hält man etwa KC fest, so sind B und D fest, als gemeinschaftliche Punkte einer Kreisschaar K oder [B, D], die von der festen Transversale L so geschnitten wird, dass diejenigen Durchmesser KM der Kreise, die auf der Sehne BN senkrecht stehen, Tangenten einer Parabel sind, welche B zum Brennpunkt, L zur Leitlinie und die Axe KC der Kreise ebenfalls zur Tangente hat.

Aus der zweiten Construction der zwei Tangenten, die durch einen gegebenen Punkt gehen, folgen leicht die wesentlichsten Sätze, welche den Tangenten im Allgemeinen zukommen. Da K

der Mittelpunkt des Kreises *BND* ist [welcher dem △ *BND* umschrieben ist], so sind $KB = KN = KD$ Radien desselben; ferner sind *KE*, *KV* Perpendikel auf zwei Seiten des Dreiecks *BND*; wird das dritte Perpendikel mit *KU* bezeichnet, so ist $NU = UD$, und *UK*, welches parallel zur Parabelaxe verläuft,

Fig. 81.



hälftet den Winkel *NKD*. Wir nehmen noch den Satz zu Hülfe: Zieht man in einem Dreieck *ABC* aus dem Mittelpunkt *M* des umschriebenen Kreises die drei Radien α, β, γ nach den Ecken und die drei Perpendikel *a*, *b*, *c* auf die Seiten, so bilden je zwei von diesen mit dem dritten und dem entsprechenden Radius gleiche Winkel, z. B. $\sphericalangle (ac) = (bc_1)$ und $(ac_1) = (bc)$, wenn a_1, b_1, c_1 die genannten Radien sind. Daraus folgt nun $\alpha = \beta$ und damit der Satz: Die Strahlen aus dem Durchschnitt *K* zweier beliebiger Tangenten der Parabel nach den beiden Brennpunkten [von denen der eine der unendlich entfernte Punkt der Axe ist, so dass sein entsprechender Strahl parallel der Axe geht] bilden mit den Tangenten gleiche Winkel. In dem symmetrischen Viereck *BKDC* sind offenbar die Winkel bei *B* und *D* gleich, ebenso im Viereck *BKNM* die Winkel bei *B* und *N*; die Winkel bei *D* und *N* sind aber ebenfalls gleich, weil $\gamma = \delta$, folglich sind auch die zwei Winkel bei *B* einander gleich, d. h.: Die Strahlen aus dem Brennpunkte *B* einer Parabel nach den Berührungspunkten *CM* irgend zweier Tangenten bilden mit dem Strahle nach dem Durchschnittspunkte *K* der letztern gleiche Winkel. Die beiden

zuletzt abgeleiteten Eigenschaften der Parabel folgen auch auf mehrere andere Arten, oder durch andere Schlüsse, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Da $\beta = \alpha$ ist, so sind die Vierecke $BKDC$ und $BMNK$ ähnlich und auch deren Hälften, die Dreiecke BKC und BMK, was zur Folge hat, dass $c : b = b_1 : c$ oder $c^2 = bb_1$, d. h.: Zieht man aus dem Brennpunkte der Parabel nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten, so wie nach deren Durchschnitt K drei Strahlen, so ist allemal das Quadrat des letztern Strahls so gross als das Rechteck unter den beiden erstern.

In den Dreiecken KBC und KBM sind resp. die Winkel bei C und K und die Winkel bei K und M einander gleich, woraus folgt: Der Winkel K zweier Tangenten ist der Summe der zwei Winkel gleich, welche sie mit den Brennpunktsstrahlen ihrer Berührungspunkte bildet, und ferner: Der Winkel K wird durch den Strahl KB in zwei solche Theile getheilt, welche wechselseitig den Winkeln gleich sind, welche die Tangenten mit den Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte bilden; oder: Zieht man aus dem Brennpunkte der Parabel zwei Strahlen nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten, so bilden sie mit diesen zwei Winkel, deren Summe dem Tangentenwinkel gleich ist; und zieht man aus dem Brennpunkte einen dritten Strahl nach dem Durchschnitte der Tangenten, so theilt er den Winkel der letztern so, dass das Stück an jeder Tangente gleich ist jenem Winkel, welchen die andere Tangente mit dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Strahle bildet.

Die unmittelbar vorhergehenden Sätze gestatten durch Umkehrung und weitere Entwicklung zahlreiche Folgerungen. Bevor auf dieselben eingegangen wird, mag aber der früher angegebene Satz: „Die Strahlen aus dem Brennpunkte B der Parabel nach den Berührungspunkten C und M irgend zweier Tangenten bilden mit dem Strahle nach dem Durchschnitte K der letztern gleiche Winkel“ für den unendlich entfernten Brennpunkt A_∞ der Parabel näher erörtert werden. Es ist klar, dass dieser Satz, wenn er für Parabel, Ellipse und Hyperbel zugleich und gleichlautend oder allgemein gültig sein soll, anders aufgefasst, d. h. an ein anderes Merkmal geknüpft werden muss. Freilich bleibt auch für den in Betracht kommenden Fall die Eigenschaft noch bestehen, dass die Strahlen aus C und M mit dem aus K an A_∞

gleiche Winkel bilden, die gleich Null sind; aber durch diese Winkel ist die Lage der Geraden KA_∞ nicht bestimmt [blos die Richtung], sie kann vielmehr unter dieser Bedingung beliebig hin und her gerückt werden, nur muss sie den beiden andern Strahlen parallel bleiben. Um ihre Lage allgemein, d. h. für jeden beliebigen Kegelschnitt zu bestimmen, müssen endlich entfernte oder sichtbare Gegenstände zu Hülfe genommen werden, z. B. die Berührungssehne CM. Diese wird für jeden sichtbaren Brennpunkt B von dem Strahle BK so getheilt, dass sich die Abschnitte verhalten, wie die anliegenden Strahlen b, b_1, denn im Dreieck CBM ist BW eine winkelhalbirende Transversale, welche bekanntlich die Grundlinie im Verhältniss der anliegenden Seiten theilt. Nun ist die Frage, ob dasselbe auch für den unendlich entfernten Brennpunkt A_∞ stattfinde? Diess ist allerdings der Fall, denn nach Obigem ist $NU = UD$, und daher muss auch die Sehne CM durch den Strahl UK gehälftet werden, was dem Verhältniss von $CA : MA$ entspricht, in welchem beide Glieder unendlich gross und einander gleich sind. Man hat also: Die Perpendikel aus irgend einem Punkte des mittlern Strahls KU auf die beiden äussern Strahlen DC und MN sind gleich.

Der behandelte Satz kann auch wie folgt ausgesprochen und festgehalten werden: Der Strahl aus einem Brennpunkte eines Kegelschnitts nach dem Durchschnitte K irgend zweier Tangenten desselben theilt die Berührungssehne in zwei Abschnitte, die sich verhalten, wie die anliegenden Strahlen aus dem Brennpunkte nach den Berührungspunkten.

Für die gegenwärtig in Betracht kommende Parabel ist dabei besonders hervorzuheben: Die Berührungssehne CM je zweier Tangenten wird von dem durch ihren Durchschnitt K gehenden Durchmesser KA_∞ gehälftet. [Durchmesser heisst jede der Axe SA_∞ parallele Gerade KA_∞. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heisst Scheitel des Durchmessers.] Durch die Berührungssehne oder deren Mitte und den Scheitel des Tangentenwinkels ist die Richtung der Axe gegeben; die Mitten aller Berührungssehnen liegen in einem Durchmesser, wenn die Scheitel der zugehörigen Tangentenwinkel in demselben sich befinden; und auch umgekehrt: allen Sehnen, deren Mitten in einem und demselben Durchmesser liegen, entsprechen solche Tangentenwinkel, deren Scheitel in denselben Durchmesser fallen.

Aus dem Satze: „Von den drei Strahlen, die aus den Berührungspunkten C, M irgend zweier Tangenten und aus dem Durchschnittspunkte K derselben parallel der Parabelaxe gezogen werden, ist der letztere in der Mitte der beiden ersten gelegen,“ folgt leicht, dass die zwei Tangenten von der im Scheitel des durch K gehenden Durchmessers gezogenen gehälftet werden, dass also die dritte Tangente der Berührungssehne jener zwei parallel ist, und dass folglich alle Berührungssehnen, deren Tangenten sich auf dem nämlichen Durchmesser schneiden, parallel sind, und ihre Mitten in demselben liegen. Dieser Satz ist auch umgekehrt richtig.

Es soll nun eine Reihe der erwähnten Folgerungen entwickelt werden. Diese Entwicklung wird dadurch schwierig, dass zu viele Eigenschaften gleichzeitig aus derselben Quelle folgen und zwar sehr leicht und fast unmittelbar. Jede Unterordnung ist mit Nachtheilen behaftet, ihr Vorzug könnte nur scheinbar sein und auf Mangel an freier Durchdringung beruhen. Die hier eingeschlagene Anordnung ist also ohne jegliche Zwangsgründe.

Da $\sphericalangle BKM = BCK$, so folgt, wenn die Tangente KC fest bleibt und KM ihre Lage ändert, dass der Winkel BKM constant bleibt, d. h.: Die Strahlen aus dem Brennpunkte B nach den Durchschnitten irgend einer festen mit beliebigen andern Tangenten bilden mit diesen letztern gleiche Winkel; oder: Der Strahl aus dem Brennpunkte nach dem Durchschnitte einer festen und einer veränderlichen Tangente bildet mit der letztern einen constanten Winkel.

Zieht man aus dem Brennpunkte einer Parabel nach allen Tangenten unter einem constanten Winkel Strahlen, so liegen sämmtliche Fusspunkte in zwei Geraden, welche selbst Tangenten sind, und zwar liegen die Fusspunkte in der einen oder andern Geraden, je nachdem der Winkel nach der einen oder andern Seite hinliegt, indem nämlich nach jeder Tangente zwei verschiedene Strahlen gehen, so lange der constante Winkel nicht $= R$. Für je zwei Ortstangenten ist der Fusspunkt des einen Strahls zugleich ihr Berührungspunkt, so dass es also im Allgemeinen zwei Tangenten gibt, welche mit dem zugehörigen Radius Vector irgend einen gegebenen Winkel bilden. Aendert man den angenommenen Winkel, so treten nach und nach alle Tangenten an die Stelle der Ortstangenten; wird derselbe $= R$, so

fallen die beiden Ortstangenten in eine zusammen, in die Tangente im Scheitel der Parabel.

Sind ein fester Punkt und eine feste Gerade gegeben und ein der Grösse nach gegebener Winkel bewegt sich in ihrer Ebene so, dass sein Scheitel die Gerade durchläuft, während der eine Schenkel desselben sich um den Punkt dreht, so beschreibt der andere Schenkel eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkt und die feste Gerade zur Tangente hat, und zwar letztere da berührt, wo der Scheitel des Winkels in dem Augenblicke liegt, wenn der beschreibende Schenkel auf die feste Gerade fällt.

Legt man durch zwei feste Punkte B und C, wovon der letztere in einer festen Geraden CK liegt, irgend einen Kreis, und an diesen in dem Punkte K, wo er die Gerade zum andern Mal schneidet, die Tangente KM, so ist der Ort der letztern eine Parabel, welche den ersten festen Punkt B zum Brennpunkt und die feste Gerade zur Tangente mit dem Berührungspunkte C hat. Oder: Zieht man bei einer Kreisschaar (BC) von zwei gemeinschaftlichen Punkten B und C durch den einen oder den andern Punkt, z. B. durch C irgend eine Transversale CK, legt in den Punkten K, in welchen sie die Kreise zum zweiten Male schneidet, Tangenten KM an dieselben, so sind diese zugleich die gesammten Tangenten einer Parabel, welche den andern Durchschnittspunkt der Kreise zum Brennpunkt, und die Transversale zur Tangente in jenem ersten Punkte hat. Da nämlich $\sphericalangle BKM = BCK$, so ist nach einem bekannten Elementarsatze KM Tangente des Kreises BCK im Punkte K.

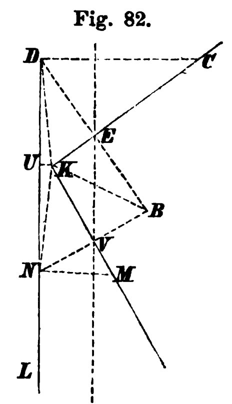
Das Stück CK jeder Tangente zwischen ihrem Berührungspunkte C und dem Punkte K, in welchem sie von irgend einer andern Tangente KM getroffen wird, erscheint dem Brennpunkte B unter einem Winkel, welcher mit dem Tangentenwinkel zusammengenommen zwei Rechte beträgt, oder dessen Nebenwinkel gleich ist. Daher müssen je zwei Tangenten unter einerlei Winkel erscheinen, weil sie nur einen Nebenwinkel haben.

Aus Früherem ergeben sich noch die nachfolgenden Sätze: Bewegen sich zwei Tangenten der Parabel so, dass ihr Winkel constant bleibt, so ist auch der Winkel (bb_1) der ihnen zugehörigen Leitstrahlen unveränderlich. Und umgekehrt: Dreht sich ein constanter Winkel um den Brennpunkt B einer Parabel, so bilden

die Tangenten, durch deren Berührungspunkte seine Schenkel in jedem Augenblicke gehen, einen ebenfalls unveränderlichen Winkel. Sollen die beiden Winkel einander gleich sein, so ist jeder $= \frac{4}{3} R$.

Wenn sich nun der constante Tangentenwinkel bewegt, so beschreibt sein Scheitel eine Hyperbel, welche für den Fall, dass der Winkel ein Rechter ist, in die Leitlinie übergeht. In der That ist, da $\sphericalangle EKV$ constant sein soll, auch EBV als Supplementwinkel constant, und zwar ist $EBV = \frac{1}{2} DKN$. Das rechtwinklige Dreieck NUK bleibt also bei der Bewegung von K sich selbst ähnlich, und es ist $\frac{KU}{NU}$ constant, und zwar kleiner als Eins. Ersetzt man schliesslich NK durch BK, so ist für eine beliebige Lage des Punktes K das constante Verhältniss $\frac{KU}{BK} < 1$, also ist der Ort von K eine Hyperbel, welche B zum Brennpunkt und L zur Leitlinie hat. Es bleibt zu bemerken übrig, dass je ein Winkel und sein Nebenwinkel zusammen eine Hyperbel ergeben, und zwar entspricht dem stumpfen Winkel der zu B gehörige, dem spitzen Winkel der andere Zweig der Hyperbel. Für einen rechten Winkel fallen, wie bereits gezeigt, die beiden Zweige mit der Leitlinie zusammen, während für den Winkel 180^0 die Hyperbel sich auf die Parabel selbst reduzirt.

Fig. 82.



§ 19. Dreiseite und Vierseite, welche der Parabel umschrieben sind.

Irgend drei Tangenten mögen die Parabel in C, M und J berühren, und einander paarweise in K, H und G schneiden, oder das Dreieck GHK bilden. Werden die zwei erstern als fest angenommen, und wird der dritten Bewegung oder Veränderung der Lage gestattet, so ist dennoch in jedem Augenblicke $h = h_1$ und $g = g_1$, wobei $g + g_1 + h + h_1 =$ const.; also ist auch $h + g =$ const. $= k_1$ oder $h + g + k = 2R$, d. h.: Die Stücke GH aller Tangenten zwischen irgend zwei festen Tangenten KC und KM erscheinen dem Brennpunkt B unter gleichen Winkeln,

und zwar unter einem Winkel, welcher mit dem festen Tangentenwinkel zusammengenommen zwei Rechte beträgt, oder dessen Nebenwinkel gleich ist. Die bewegliche Tangente, oder das begränzte Stück GH derselben, kann insbesondere auf die begränzten Stücke KC und KM der festen Tangenten fallen, in welchem Falle der Satz mit einem frühern übereinstimmt. Es mag hier bemerkt werden, dass von den drei Winkeln eines Tangentendreiecks allemal nur einer [in der Figur K] ein eigentlicher Tangentenwinkel ist; die beiden andern sind Tangentennebenwinkel.

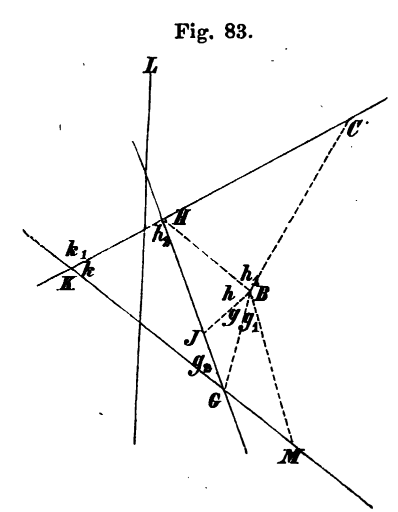


Fig. 83.

Da $\sphericalangle HKG + HBG = 180^0$ ist, so gelten die Sätze: Die drei Durchschnittspunkte G, H, K je dreier Tangenten einer Parabel liegen mit dem Brennpunkte B in einem Kreise. Oder: Jedes Dreieck, welches durch irgend drei Tangenten einer Parabel gebildet wird [dessen Seiten eine Parabel bilden], hat die Eigenschaft, dass der ihm umschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Parabel geht. Oder: Die Tangenten einer Parabel bilden, zu je dreien genommen, unzählige Dreiecke, welche die gemeinsame Eigenschaft haben, dass die ihnen umschriebenen Kreise einander sämmtlich im Brennpunkt der Parabel schneiden.

Jeder Kreis (BK), welcher durch den Brennpunkt B und den Durchschnittspunkt K irgend zweier festen Tangenten der Parabel geht, schneidet diese Tangenten in zwei Punkten G und H, welche allemal in irgend einer dritten Tangente GH liegen. Oder: Hat man eine Kreisschaar (BK) von zwei gemeinschaftlichen Punkten B, K, und zieht durch einen der letztern (K) zwei beliebige Transversalen KC und KM, so bestimmen diese in jedem Kreise eine Sehne (GH etc.), und alle diese Sehnen sind Tangenten einer und derselben Parabel, welche den andern gemeinschaftlichen Punkt der Kreise zum Brennpunkt hat, und welche auch die Transversalen berührt, und zwar jede in dem-

jenigen Punkte (C, M), in welchem sie von dem Kreise, der die andere in K berührt, geschnitten wird.

Bleibt ein Winkel K eines veränderlichen Vierecks $BGKH$, sowie der Scheitel B des gegenüberstehenden Winkels fest, und ist die Summe dieser Winkel gleich zwei Rechten, so ist der Ort der Diagonale GH, welche die Scheitel der zwei übrigen Winkel verbindet, eine Parabel, welche dem festen Winkel eingeschrieben ist, und welche den festen Scheitel B des Gegenwinkels zum Brennpunkt hat. Oder: Dreht sich ein Winkel GBH, der mit einem festen Winkel K zusammengenommen zwei Rechte beträgt, um irgend einen festen Punkt B, so bewegt sich die Gerade GH, welche durch die Durchschnitte der Schenkel beider Winkel geht, als Tangente einer Parabel, welche dem festen Winkel eingeschrieben ist, und welche den festen Scheitel des beweglichen Winkels zum Brennpunkt hat.

Kommt die veränderliche dritte Tangente GH in die eigenthümliche Lage, dass ihr Leitstrahl BJ durch den Durchschnitt K der festen Tangente geht, so wird $(g + g_1) = (h + h_1)$, daher $g = h$ und mithin auch $g_2 = h_2$, folglich ist das Tangentendreieck GKH ein gleichschenkliges mit der Spitze K, der Grundlinie GH und den gleichen Seiten $KG = KH$. Daraus folgen nachstehende Sätze:

Wird der Parabel irgend ein gleichschenkliges Dreieck GKH umgeschrieben [was mit Hülfe einer frühern Construction leicht zu machen ist], so liegen die drei Punkte, die Spitze K des Dreiecks, der Berührungspunkt J der Grundlinie und der Brennpunkt B der Parabel allemal in einer Geraden, so dass die Gerade, welche durch irgend zwei der genannten Punkte bestimmt wird, nothwendig auch durch den dritten geht. Und umgekehrt: Wird einem gleichschenkligen Dreieck irgend eine Parabel eingeschrieben, so findet dasselbe statt.

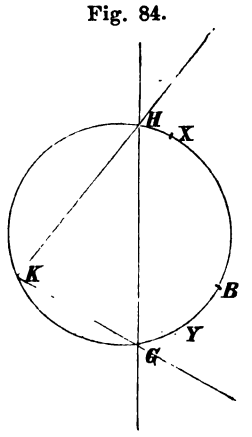
Beschreibt man um eine Parabel ein gleichseitiges Dreieck, oder hat man irgend drei Tangenten der Parabel, welche ein gleichseitiges Dreieck einschliessen, so treffen die drei Strahlen, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, einander allemal in einem und demselben Punkte B, nämlich im Brennpunkte der Parabel. Oder: Wird einem gegebenen festen gleichseitigen Dreiecke irgend eine Parabel eingeschrieben, und werden aus den Ecken des Dreiecks

durch die Berührungspunkte der Gegenseiten Strahlen gezogen, so treffen sich diese in irgend einem Punkte, welcher zugleich der Brennpunkt der jedesmaligen Parabel ist, und dessen Ort die dem Dreieck umschriebene Kreislinie ist. Oder umgekehrt: Nimmt man in der einem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreislinie irgend einen Punkt B und zieht aus demselben durch die Ecken des Dreiecks Strahlen, so treffen diese die Seiten des Dreiecks in drei solchen Punkten, in welchen sie von einer bestimmten Parabel berührt werden, welche B zum Brennpunkte hat.

Aus der Grundbestimmung der Parabel folgt, dass dieselbe durch den Brennpunkt B und irgend zwei Tangenten HG, HK bestimmt ist, denn die Perpendikel aus B auf die gegebenen Geraden HG, HK verdoppelt geben zwei Punkte der Leitlinie, wodurch diese bestimmt ist. Durch Leitlinie und Brennpunkt ist aber die Parabel unzweideutig gegeben. Oder: Die Kreisschaar BH schneidet die gegebene Gerade in solchen Punktenpaaren G und K, durch welche die gesammten Tangenten der Parabel erzeugt werden.

Beschreibt man um das Dreieck GHK, welches durch irgend drei unbegränzte Gerade gebildet wird, einen Kreis, so ist jeder Punkt dieser Kreislinie Brennpunkt einer bestimmten Parabel, welche jene drei Geraden zu Tangenten hat, oder welche dem Dreieck eingeschrieben ist. Denn sieht man zwei der drei Geraden, etwa HG und HK, als Tangenten und B als Brennpunkt an, so ist dadurch eine Parabel bestimmt; wollte man aber annehmen, sie berühre die dritte Gerade KG nicht, so müsste z. B. aus K eine andere Tangente KG_1 möglich sein, welche mit der HG einen Punkt G_1 statt G gemein hätte; allein alsdann müssten auch B, H, K, G_1 in einem Kreise liegen, was unmöglich ist, da durch die drei Punkte BHK nur ein Kreis gehen kann, und dieser angenommener Massen die Gerade HG ausser in H nur noch in G schneidet. Umgekehrt, geht irgend ein Kreis durch den Brennpunkt einer Parabel, so sind im Allgemeinen, wofern er nämlich die Parabel schneidet, unzählige Dreiecke möglich,

Fig. 84.



welche zugleich dem Kreise eingeschrieben und zugleich der Parabel umgeschrieben sind. Denn legt man an die Parabel irgend eine Tangente *GK*, welche den Kreis schneidet, und sofort durch die Durchschnittspunkte zwei neue Tangenten an dieselbe, so müssen sich diese auf dem Kreise schneiden, weil *KHGB* immer in einem Kreise liegen müssen, und dieser durch *BGK* bestimmt ist. Berührt die erste Tangente zugleich den Kreis, so fallen die zwei neuen in eine zusammen, deren Berührungspunkt alsdann *X* oder *Y* ist, wenn *X* und *Y* die Schnittpunkte von Kreis und Parabel bezeichnen. Dadurch sind umgekehrt die gemeinschaftlichen Tangenten einer Parabel und eines Kreises zu finden, wenn dieser durch den Brennpunkt von jener geht, die gezeichnet vorliegt.

Aus den eben bewiesenen Parabeleigenschaften fliessen unmittelbar folgende Sätze: Der Ort der Brennpunkte einer Parabel, welche irgend einem gegebenen festen Dreiecke *GHK* eingeschrieben ist, ist die dem Dreieck umschriebene Kreislinie. — Nimmt man in der einem beliebigen Dreieck *GHK* umgeschriebenen Kreislinie irgend einen Punkt *B* an, und fället aus demselben Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die Fusspunkte allemal in einer Geraden. In der That liegen diese Punkte in der Scheiteltangente derjenigen Parabel, welche *B* zum Brennpunkte hat, und dem Dreiecke *GHK* umschrieben ist. — Der Ort des Punktes *B*, welcher die Eigenschaft hat, dass die aus ihm auf die Seiten eines gegebenen festen Dreiecks gefällten Perpendikel Fusspunkte haben, die in irgend einer Geraden liegen, ist die dem Dreieck umschriebene Kreislinie. — Oder allgemeiner, indem man einen ebenfalls bewiesenen Parabelsatz anwendet: Zieht man aus dem genannten Punkte *B* Strahlen nach den Seiten des Dreiecks, welche mit denselben irgend welche, aber einander gleiche und nach derselben Seite hin liegende Winkel bilden, so liegen die Fusspunkte in einer Geraden, ein Satz, der sich leicht umkehren lässt. — Diejenigen Geraden, welche durch alle der so eben definitiven Strahlen bestimmt werden, die von einem und demselben Punkte *B* ausgehen, mit Einschluss der Seiten des Dreiecks, bilden die gesammten Tangenten einer Parabel, welche den Punkt *B* zum Brennpunkt hat. — Zieht man aus dem im umgeschriebenen Kreise willkürlich angenommenen Punkte *B* Strahlen nach den Ecken des Dreiecks, und von da aus an-

dere Strahlen, welche die Winkel des Dreiecks in eben solche Theile zerlegen wie jene ersten, so sind die drei neuen Strahlen allemal parallel, weil sie nach dem unendlich entfernten Brennpunkte A_∞ derjenigen Parabel gehen, die B zum Brennpunkte hat, und welche dem gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist. — Zieht man durch die Ecken eines beliebigen Dreiecks nach irgend einer Richtung parallele Strahlen, und sodann drei neue Strahlen, welche mit den Seiten beziehlich dieselben Winkel bilden wie jene, nur die Seiten verwechselt genommen, so treffen die drei neuen Strahlen einander in einem Punkte, und der Ort des letztern für alle möglichen Richtungen ist die dem Dreieck umgeschriebene Kreislinie. — An diese Sätze schliesst sich die Lösung der folgenden Aufgabe: Wenn irgend ein Dreieck GHK gegeben ist, so soll in dem ihm umgeschriebenen Kreise derjenige Punkt B gefunden werden, welcher die Eigenthümlichkeit hat, dass die Fusspunkte der aus ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel in einer Geraden g liegen, welche mit einer gegebenen Geraden G parallel ist. Durch eine Spitze des Dreiecks ziehe man den auf der Geraden G senkrechten Strahl, und sofort den zweiten Strahl, der mit den Seiten verwechselt eben solche Winkel bildet, wie jene, so geht derselbe durch den verlangten Punkt B. Analog wird die allgemeinere Aufgabe behandelt, wenn statt der Perpendikel unter irgend einem gegebenen Winkel φ Strahlen aus B an die Seiten gezogen werden sollen. Dieselbe gewährt zwei Lösungen.

Soll eine Parabel vier Gerade berühren, d. h. einem vollständigen Vierseit eingeschrieben werden können, so müssen die den vier Dreiecken [aus welchen das Vierseit besteht] umgeschriebenen Kreise einander in einem und demselben Punkte B schneiden, welcher der Brennpunkt der Parabel ist, und umgekehrt, findet letzteres statt, so ist auch ersteres möglich.

Beschreibt man um zwei der vier Dreiecke Kreise, so haben sie allemal eine Ecke des Vierseits gemein und müssen also einander im Allgemeinen noch in einem andern Punkte B schneiden. Fället man aus diesem Punkte Perpendikel auf die Seiten der Dreiecke, so liegen für jedes Dreieck die zugehörigen drei Fusspunkte in einer Geraden; zwei Fusspunkte sind aber für beide Dreiecke gemein, indem zwei Paar Seiten in denselben zwei Geraden liegen, und statt sechs Fusspunkte nur vier vorhanden

sind. Es kann also für die zwei Dreiecke nicht verschiedene Fusspunktsgeraden geben, sondern nur eine, und folglich müssen alle vier Fusspunkte in einer und derselben Geraden liegen. Hiernach aber müssen auch die zwei Kreise, welche den noch übrigen beiden Dreiecken umgeschrieben werden, durch eben denselben Punkt gehen. Es ist noch zu bemerken, dass durch den Punkt B als Brennpunkt und durch die zwei gemeinschaftlichen Seiten der betrachteten Dreiecke als Tangenten die Parabel bestimmt ist, aber dass sie die zwei Geraden oder Seiten zugleich zu Tangenten hat.

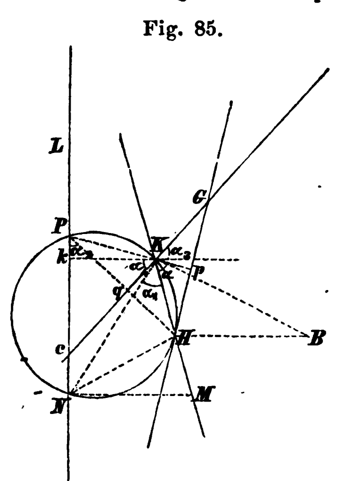
Die nachfolgenden Sätze bedürfen nun keines Beweises mehr: Vier beliebige Gerade in einer Ebene, von denen keine zwei parallel sind und auch nicht mehr als zwei durch den nämlichen Punkt gehen, bilden zu je drei genommen vier Dreiecke, und die denselben umgeschriebenen vier Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte B. — Sie können von einer bestimmten Parabel berührt werden, und der Brennpunkt derselben ist B; also ist durch vier Tangenten stets eine, aber auch nur eine Parabel bestimmt. — Es gibt einen, aber nur einen bestimmten Punkt B, für welchen die Fusspunkte der von ihm auf die vier Geraden gefällten Perpendikel in einer Geraden liegen. Diese Gerade ist die Scheiteltangente der Parabel, welche die vier gegebenen Geraden berührt, und deren Brennpunkt B ist. — Es gibt nur einen bestimmten Punkt B, der so beschaffen ist, dass, wenn aus demselben nach den gegebenen Geraden unter irgend gleichen Winkeln Strahlen gezogen werden, die vier Fusspunkte jedesmal in einer Geraden liegen. Jener Punkt ist B, und diese Gerade g, resp. alle die unendlich vielen derartigen Geraden, welche durch Aenderung des in Frage kommenden Winkels erhalten werden, sind die gesammten Tangenten der angezeigten Parabel. Auch die vier Grundgeraden stellen sich als Gerade g dar. — Es gibt einen einzigen Punkt (B), der die Eigenthümlichkeit besitzt, dass, wenn man aus ihm nach den sechs Ecken des Vierseits Strahlen zieht und sofort unter verwechselten Winkeln sechs neue Strahlen auslaufen lässt, diese einander parallel sind. Umgekehrt: Es gibt eine bestimmte Richtung, aber nur eine, welche die Eigenschaft hat, dass, wenn in ihr durch die Ecken Strahlen gezogen und sofort durch sechs neue Strahlen die Winkel umgekehrt getheilt werden, diese letztern

Strahlen in einem und demselben Punkte zusammenlaufen. Die Richtung dieser Strahlen ist zugleich die der Axe der Parabel.

Ueber das durch irgend drei Tangenten der Parabel gebildete Dreieck soll jetzt noch ein interessanter Satz bewiesen werden, aus welchem in Verbindung mit dem Vorhergehenden verschiedene nicht minder merkwürdige Folgerungen zu ziehen sind.

Durch die Endpunkte *H*, *K* einer Seite des Dreiecks und durch den Fusspunkt *N* des aus ihrem Berührungspunkt *M* auf die Leitlinie *L* gefällten Perpendikels lege man den Kreis *NHKP*,

Fig. 85.



welcher die Leitlinie zum zweiten Male in *P* schneidet; ziehe sofort die Strahlen *BK*, *NK*, *PH* etc., so ist Winkel $\alpha_2 = \alpha_1$ (über der Sehne *NH*) $= \alpha = \alpha_3 = \alpha_4$. Daher haben die Dreiecke *ckK* und *cqP* zwei paar gleiche Winkel, nämlich $\alpha_2 = \alpha_4$ und *c* gemein; folglich ist auch das dritte Paar gleich, $k = q$; nun ist der Strahl *kK* der Axe parallel, also $k = R$, folglich ist auch $q = R$ und somit *HqP* das aus der Ecke *H* auf die Gegenseite *GK* des Dreiecks herabgelassene Perpendikel. Es ist a priori zu schliessen, dass es sich bei der andern Ecke *K*, durch welche der Hülfskreis geht, ebenso verhalten müsse, indem zwischen beiden in der Construction kein Unterschied vorhanden ist, oder es kann diess auf ganz gleiche Weise bewiesen werden. [Heisst, wo die Figur leicht zu vervollständigen ist, der Nebenwinkel von β_2 bei $P = \gamma_2$, so ist, als Gegenwinkel des Vierecks *NHKP* im Kreise $\gamma_2 + \beta_1 = 2R$, daher, da $\beta_1 = \beta$ und $\beta + \gamma = 2R$, auch $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$, folglich die Dreiecke *ihH* und *ipP* gleichwinklig und desshalb Winkel $h = p = R$, also *PKp* das aus der Ecke *K* auf die Gegenseiten des Dreiecks gefällte Perpendikel.] Demzufolge ist *P* der Durchschnitt der drei Perpendikel aus den Ecken auf die Gegenseiten des Tangentendreiecks *GHK*, und zwar liegt er in der Leitlinie der Parabel. Daraus entspringen folgende Sätze:

Bei jedem durch irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecke liegt der Durchschnittspunkt der drei Höhen in der Leitlinie L der Parabel.

Die Leitlinien aller Parabeln, welche irgend einem festen Dreiecke eingeschrieben sind [oder sich einschreiben lassen], schneiden einander in einem und demselben bestimmten Punkte, in welchem sich nämlich zugleich die drei Höhen des Dreiecks durchkreuzen.

Fället man aus irgend einem Punkte B der Kreislinie, welche einem beliebigen festen Dreieck GHK umschrieben ist, Lothe auf die Seiten des Dreiecks und verlängert dieselben jenseits der Seiten um sich selbst, so liegen die drei Endpunkte jedesmal in einer Geraden, welche sich um einen bestimmten festen Punkt B dreht, wenn jener Punkt B die Kreislinie durchläuft, und zwar ist der feste Punkt der Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks.

In jedem der vier Dreiecke, welche durch ein vollständiges Vierseit gebildet werden, treffen die drei Höhen in einem Punkte zusammen, und die auf diese Weise bestimmten vier Punkte liegen in einer Geraden, welche die Leitlinie der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel ist.

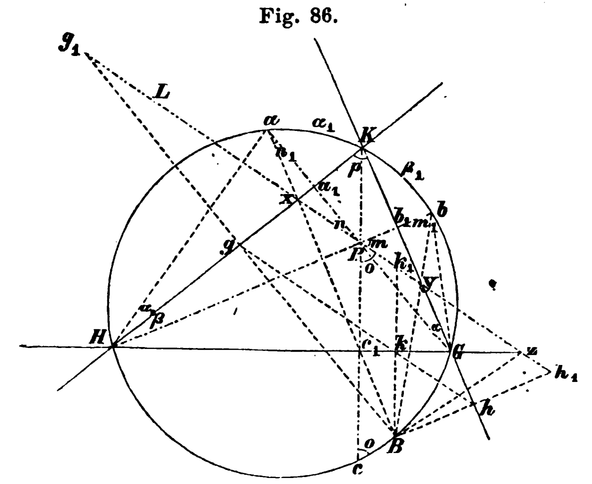
Bekanntlich ist der Kreis $NHKP$ dem Kreise $BHKG$ gleich, so wie auch den Kreisen GHP und GKP. Daher schliesst man: Schneiden von vier gleichen Kreisen dreimal drei einander in einem Punkte, so schneiden sich stets zum vierten Male drei in einem Punkte. — Zieht man durch einen der vier Punkte eine Gerade L, errichtet auf sie in den Punkten, wo sie die zugehörigen drei Kreise zum zweiten Male schneidet, Lothe bis an die entsprechenden Seiten des durch die drei übrigen Kreisschnittpunkte bestimmten Dreiecks GHK, beschreibt mit denselben um ihre Endpunkte M, C, J Kreise, so schneiden sich auch diese in einem Punkte B, und zwar mit dem vierten gegebenen Kreise, der durch GHK geht, zusammen.

Eine Reihe der gegebenen Sätze lässt sich durch folgende Elementarbetrachtung vorbereiten und in umgekehrter Ordnung darstellen:

Die Kreislinie, welche einem beliebigen Dreieck GHK umgeschrieben ist, wird durch die Höhen desselben [GPa, HPb, KPc] in drei paar gleiche Bogen getheilt. Denn da z. B. Winkel $\alpha = \beta$ vermöge der rechtwinkligen Dreiecke Ga_1K und Hb_1K,

so ist Bogen $\alpha_1 = \beta_1$ etc. Daher ist auch, bei H, $\beta = \alpha_2$ und folglich $aa_1 = a_1 P$, und aus ähnlichen Gründen ist $bb_1 = b_1 P$, $cc_1 = c_1 P$, d. h.: Die Abschnitte der drei Höhen zwischen ihrem Durchschnitte P und den Punkten a, b, c, in welchen sie die

Fig. 86.



Kreislinie zum zweiten Male treffen, werden durch die zugehörigen Grundlinien [Seiten des Dreiecks] gehälftet.

Irgend eine Transversale L durch P schneide die Seiten des Dreiecks in x, y, z. Man ziehe die Geraden ax, by, cz, so entstehen gleichschenklige Dreiecke axP, byP, czP, so dass Winkel $n_1 = n$, $m_1 = m$, $(o = o)$. Vermöge des einem Kreise einschreibbaren Vierecks Kb_1Pa_1 ist $n + m = p$, also auch $n_1 + m_1 = p$, daher die Summe der Bogen unter n_1 und m_1 gleich dem Bogen unter p, d. h. GBH; jene haben aber mit diesem die Endpunkte G und H gemein, folglich müssen ihre andern Endpunkte in B zusammenfallen, d. h.: Die ersten Strahlen ax, by, cz (für welche dasselbe folgt) treffen sich in irgend einem und demselben Punkte B der Kreislinie. — Zieht man nun aus B auf die Seiten des Dreiecks die Perpendikel Bgg_1, Bhh_1, Bkk_1, so sind die Dreiecke Bxg_1, Byh_1, Bzk_1 Scheiteldreiecke des vorigen und ebenfalls gleichschenklig, daher liegen die Mitten ihrer Grundlinien oder die Fusspunkte der Perpendikel g, h, k in einer der L parallelen Geraden ghk. Aus dieser Betrachtung und durch Umkehrung der Schlüsse folgen nachstehende Elementarsätze:

Die einem beliebigen Dreiecke umgeschriebene Kreislinie begränzt die Höhen desselben so, dass die Fusspunkte die Mitten sind zwischen jenen Gränzpunkten und dem gegenseitigen Durchschnitte der Höhen. — Die Gränzpunkte liegen so, dass die Ecken des Dreiecks die Mitten der sie verbindenden Bogen sind. Umgekehrt: Nimmt man in einer Kreislinie drei beliebige Punkte a, b und c, hälftet die dazwischen liegenden Bogen in K, H und G, so schneiden sich die drei Seiten aG, bH und cK in irgend einem Punkte P, und sind zugleich beziehlich rechtwinklig zu den drei Sehnen KH, GK, HG, d. h. sie sind zugleich die Höhen des Dreiecks GHK; auch werden die Stücke der erstern Sehnen, die zwischen ihren Anfangspunkten abc in ihrem gemeinschaftlichen Punkte B liegen, von den drei letztern Sehnen gehälftet.

Zieht man durch P irgend eine Gerade L, welche die Seiten des Dreiecks GHK in x, y und z schneidet, und legt durch diese Punkte und durch die entsprechenden Gränzpunkte a, b, c der Höhen Strahlen ax, by, cz, so treffen diese in irgend einem Punkte B zusammen; dieser Punkt B liegt jedesmal in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie, und zwar ist diese sein Ort, so dass, wenn die Gerade L sich um den festen Punkt P dreht, alsdann der Punkt B die Kreislinie continuirlich und ganz beschreibt. — Umgekehrt: Zieht man aus einem beliebigen Punkte B der Kreislinie nach den Gränzpunkten abc der Höhen des Dreiecks Strahlen Ba, Bb, Bc, so liegen die Punkte x, y, z, in welchen sie die entsprechenden Seiten des Dreiecks treffen, in einer Geraden L; diese Gerade geht stets durch einen bestimmten festen Punkt, nämlich durch den gemeinsamen Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks, so dass sie sich um denselben dreht, wenn jener angenommene Punkt B die Kreislinie durchläuft. — Ferner: Fällt man aus B Perpendikel Bgg_1, Bhh_1, Bkk_1 auf die Seiten des Dreiecks GHK und verlängert sie bis an L, so sind die Fusspunkte g, h, k die Mitten derselben, und also liegen die Fusspunkte in einer Geraden ghk. — Umgekehrt: Fällt man aus einem beliebigen Punkte B der Kreislinie Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die drei Fusspunkte ghk in einer Geraden [die Richtung der Geraden ist jedesmal eigentlich, d. h. es gibt keine zwei, die parallel sind]; werden die Perpendikel über die Seiten hinaus verlängert, und zwar ver-

doppelt, so liegen ihre Endpunkte g_1, h_1, k_1 in einer andern Geraden L, welche stets durch einen bestimmten festen Punkt P geht, nämlich durch den Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks, und welche sich also um diesen Punkt herumdreht, wenn jener die Kreislinie durchläuft.

Errichtet man in den Punkten xyz Lothrechte auf die Seiten des Dreiecks GHK und fällt sodann aus B Perpendikel auf dieselben, so liegen die Fusspunkte in der nämlichen Geraden ghk. Daher müssen die drei Lothrechten ein Dreieck bilden, dessen umgeschriebener Kreis durch B geht; werden die Perpendikel verdoppelt, so liegen ihre Endpunkte in der nämlichen Geraden L; denn das Perpendikel auf die Lothrechte in x ist parallel und gleich gx, daher bis an L verlängert gleich $2gx$, weil g die Mitte von Bg_1 ist. Also liegt auch der Durchschnitt der Höhen dieses neuen Dreiecks in L.

Vermöge vorhergehender Entwicklungen hat man in Rücksicht des gleichseitigen Dreiecks noch folgende besondere Sätze: Es gibt unzählige regelmässige Dreiecke, die irgend einer gegebenen Parabel umgeschrieben sind; nämlich jede Tangente der Parabel ist Seite eines solchen Dreiecks, aber auch nur eines einzigen. — Die Mittelpunkte aller dieser Dreiecke liegen in der Leitlinie der Parabel und erfüllen sie einfach, d. h. jeder Punkt derselben ist Mittelpunkt von einem der genannten Dreiecke, aber nur von einem. — Die den Dreiecken umschriebenen Kreise haben die Axe der Parabel zur gemeinschaftlichen Potenzlinie, und zwar schneiden sie einander in zwei Punkten auf derselben, wovon einer der Brennpunkt B ist. In jedem Kreise liegt nur ein Dreieck.

Schliesslich seien noch folgende Sätze angeführt: Zieht man aus einem Brennpunkte B der Parabel Strahlen nach den Ecken des ihr umschriebenen Dreiecks GHK, und ferner drei Strahlen nach den Berührungspunkten M, C, J desselben, so ist allemal das Product jener drei Strahlen dem Producte der letztern drei gleich. — Zieht man aus den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks durch irgend einen Punkt B der ihm umgeschriebenen Kreislinie Strahlen bis an die Gegenseiten, so ist das Product derjenigen drei Abschnitte der Strahlen, welche zwischen jenem Punkte und den Ecken liegen, gleich dem Producte der drei übrigen Abschnitte, welche zwischen dem Punkte und den Seiten liegen.

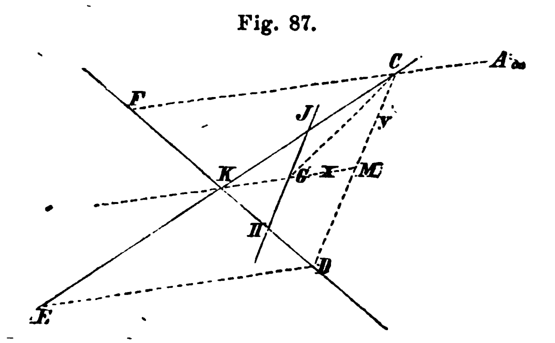
Auch ist einzeln das Quadrat jedes der drei erstern Strahlen dem Rechtecke unter den zwei ihm nicht zugehörigen letztern Strahlen inhaltsgleich.

§ 20. Weitere Eigenschaften der Parabel und ihrer Tangenten.

Von den drei Strahlen CF, KM, DE, welche durch die Berührungspunkte und den Durchschnittspunkt irgend zweier Tangenten der Parabel mit der Axe derselben parallel (nach A_∞) gezogen werden, ist der mittlere, KM, gleichweit von den zwei andern entfernt. Demnach wird jede Gerade, welche den ersten Strahl CA_∞ mit dem dritten DA_∞ verbindet, durch den mittlern KA_∞ gehälftet. Also werden namentlich die Tangenten CE, DF selbst in K gehälftet, d. h.: Das Stück CE jeder Tangente der Parabel, welches zwischen dem Berührungspunkt C und irgend einem Durchmesser EDA_∞ liegt, wird von der Tangente DF im Scheitel D dieses Durchmessers gehälftet.

Nun sei HJ die Tangente im Scheitel des Durchmessers KMA_∞, so sind J und H die Mitten der Tangenten CK und DK und folglich $HJ \parallel CD$, sowie ferner $GJ = GH$ [weil $MC = MD$ ist], und endlich ist noch $GK = KM$. Bleibt der Durchmesser

Fig. 87.



GA_∞ fest, während der Durchschnitt K der zwei ersten Tangenten sich auf demselben bewegt, so ändern sich zwar die betrachteten Linien, aber die bemerkten Umstände und Gleichungen bestehen fort, d. h. es bleibt $GK = GM$, $GJ = GH$, $MC = MD$ und $HJ \parallel CD$, wobei HJ als Tangente in dem festen Punkte G feste Lage und Richtung hat. Daraus zieht man den folgenden Satz:

Bewegt sich der Durchschnitt K zweier Tangenten der Parabel in irgend einem Durchmesser GA_∞ derselben, so behält die Berührungssehne CD constante Richtung, nämlich sie bleibt stets der Tangente HJ im Scheitel G jenes Durchmessers parallel; die Mitte M der Sehne liegt stets im Durchmesser. Das Stück HJ von der Tangente im Scheitel, welches durch die jedesmaligen zwei Tangenten begränzt ist, wird durch den Scheitel G des Durchmessers gehälftet; ebenso liegt dieser Scheitel in der Mitte zwischen dem Durchschnitte K der jedesmaligen zwei Tangenten und dem Mittelpunkt M ihrer Berührungssehne. Und umgekehrt: Zieht man in einer Parabel parallele Sehnen nach einer beliebigen Richtung, so liegen ihre Mitten allemal in irgend einem und und demselben Durchmesser, welcher auch durch den Berührungspunkt G der den Sehnen parallelen Tangente, sowie durch die Durchschnitte K der sämmtlichen Tangentenpaare in den Endpunkten der Sehnen geht.

Hierdurch wird, wie man sieht, die Benennung „Durchmesser" gerechtfertigt. Wenn auch zu irgend einem Durchmesser GA_∞ kein zugeordneter wirklich existirt, so kann man doch die Richtung der von ihm halbirten Sehnen oder der Tangente in seinem Scheitel als ihm oder seiner Richtung zugeordnet ansehen, oder als Richtung des ihm zugeordneten, aber unendlich entfernten Durchmessers annehmen. In diesem Sinne würde, wenn G als Anfangspunkt der Coordinaten in Bezug auf zwei conjugirte Durchmesser genommen wird, $CM = y$ die Ordinate und $MG = x$ die Abscisse sein, sowie ferner KC oder KD die Tangente und KM die Subtangente. Der eine Theil des vorstehenden Satzes hiesse demnach: Bezieht man die Parabel auf einen beliebigen Durchmesser und die ihm zugehörige Scheiteltangente als Coordinatenaxen, so ist die Abscisse x halb so gross als die Subtangente. Auch folgt aus diesen Bemerkungen: Alle wirklichen Durchmesser sind mit einander parallel, so dass mit jedem die Richtung aller übrigen und also namentlich die Richtung der Axe, sowie die der Leitlinie gegeben ist. — Die der Axe zugeordnete Richtung ist senkrecht zu derselben und ist die Richtung der Tangente im Hauptscheitel der Parabel oder auch die Richtung der Leitlinie. —

Wenn eine Parabel gezeichnet vorliegt, so soll 1) die Richtung ihrer wirklichen Durchmesser d. h. irgend eines derselben

und 2) die Axe gefunden werden. Ferner: 3) Wenn blos ein Bogen der Parabel, welcher den Hauptscheitel Q nicht enthält, gegeben ist, so soll dieser Scheitel und die Axe gefunden werden. Man ziehe zur Lösung von 1) zwei parallele Sehnen CD und C_1D_1, so geben ihre Mitten einen Durchmesser MM_1. Sofort wird auch die Tangente im Scheitel G dieses Durchmessers gefunden, denn sie ist jenen Sehnen parallel. 2) Aus irgend einem Punkte R der Parabel fälle man auf den Durchmesser MM_1 ein Perpendikel, welches der Parabel in einem zweiten Punkte S begegnen wird, und ziehe sofort die Gerade QA_∞, welche die Sehne RS rechtwinklig hälftet, so ist sie die Axe QA_∞. 3) Da G die Mitte von KM ist, so sind die Strahlen CF, CK, CG und CM harmonisch. Wäre nun der Bogen CN nur bis N gegeben, und sollte der Scheitel G des irgend einer gegebenen Richtung CD zugeordneten Durchmessers GA gefunden werden, welcher Scheitel nämlich jenseits jenes Bogens liegen kann, so construire man zunächst irgend einen Durchmesser CA_∞, ferner in dessen Scheitel C [welcher natürlicher Weise in dem gegebenen Bogen liegt] die Tangente CK, dann ziehe man durch denselben (C) den Strahl CM der gegebenen Richtung parallel und suche endlich zu den drei Strahlen CA_∞, CK, CM den vierten harmonischen, CA_∞ zugeordneten Strahl CG, so muss dieser allemal durch den gesuchten Scheitel G gehen; letzterer wird daher gefunden, wenn die Construction wiederholt wird, wodurch man nämlich mit einem neuen Punkt C_1 und neuen Strahlen C_1F_1, C_1K_1, C_1M_1 auch einen neuen Strahl C_1G_1 erhält, dessen Durchschnitt mit CG den gesuchten Punkt G gibt. Es ist klar, wie hierdurch der Hauptscheitel Q gefunden werden kann; nämlich für diesen ist die gegebene Richtung CM zu der festen Richtung CA_∞ rechtwinklig.

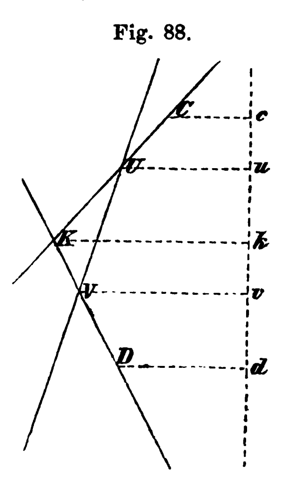
Ist die Gleichung der Parabel in Bezug auf irgend einen Durchmesser GA_∞ und die zugehörige Scheiteltangente als Coordinatenaxe: $y^2 = px$ [es wird leicht bewiesen, dass sich diese Form der Gleichung stets herstellen lässt], so heisst p „Parameter" des jeweiligen Durchmessers. Für den besondern Fall, wo $y = 2x$ oder gleich der Subtangente KM und also $y = \frac{1}{2}p$, $x = \frac{1}{4}p$ ist, muss offenbar das Dreieck DKC bei K rechtwinklig sein [weil $MK = MD = MC$], folglich liegt der Punkt K in der Leitlinie L. Also: Das Stück GP jedes Durchmessers zwischen seinem Scheitel G und der Leitlinie L ist dem vierten Theile

des zugehörigen Parameters gleich [denn $KG = GM = x = \frac{1}{4}p$]. Oder: Diejenige Ordinate y, welche durch den Brennpunkt P geht, ist dem halben Parameter p gleich [oder die doppelte Ordinate dem ganzen]. Oder: Ist die Ordinate y dem halben Parameter p gleich, so schneidet die zugehörige Tangente CK den Durchmesser PGM mit der Leitlinie L in einem und demselben Punkte P, und beide Tangenten, welche derselben Ordinate, wenn diese positiv und negativ genommen wird, entsprechen, sind zu einander rechtwinklig.

Für den wirklichen Brennpunkt der Parabel B [so wie für jeden Brennpunkt A und B einer Ellipse oder einer Hyperbel] erscheint das Stück, welches irgend zwei feste Tangenten von jeder andern oder von einer beweglichen dritten abschneiden, unter einem constanten Winkel; es kann gefragt werden, welches der analoge Satz für den unendlich entfernten Brennpunkt A_∞ der Parabel sei?

Zwischen den zwei festen Tangenten KC, KD sei UV eine beliebige dritte; die Strahlen Cc, Uu, Kk, Vv, Dd seien der Axe parallel, so hat man $uk = vd$, $kv = cu$, und desshalb $uv = \frac{1}{2} cd$. Ist nun cd zu jenen Strahlen rechtwinklig, so ist uv der senkrechte Abstand der Strahlen Uu und Vv von einander, d. h. der Strahlen, welche aus den Endpunkten der veränderlichen dritten Tangente nach A_∞ gezogen sind; da cd constant ist, so bleibt folglich auch dieser Abstand uv constant. Der in Frage stehende Satz lautet also:

Fig. 88.



Irgend zwei feste Tangenten der Parabel begränzen alle übrigen so, dass die Stücke einerlei Höhe haben, d. h. dass die durch die Endpunkte jedes Stücks der Axe parallel gelegten Strahlenpaare constanten Abstand von einander haben, oder dass die Summe resp. der Unterschied der Perpendikel, welche aus den Endpunkten der dritten Tangente auf die Axe herabgelassen werden, constant ist. Oder: Jede dritte Tangente erscheint von A_∞ aus unter constanter Höhe.

Es folgt ferner unmittelbar:

Irgend zwei feste Tangenten begränzen von derjenigen der übrigen Tangenten das kleinste Stück, welche zu der Axe senkrecht steht, also von der Tangente im Scheitel der Parabel.

Bezeichnet man den Berührungspunkt der Tangente UV mit T, und schneidet die von T aus parallel der Axe gelegte Gerade die cd in einem Punkte t, so gelten folgende Relationen: Der Strahl KA_∞ trifft die Mitte k der Transversalen cd, daher ist $kc = vu$, also $kv = ud = ut$, und ebenso $kd = uv$, also $ku = vc = vt$; hiernach ist weiter $kv : vc = du : uk = ut : tv$, aber es ist auch $kv : vc = KV : VC$, $du : uk = DU : UK$ und $ut : tv = UT : TV$, folglich ist:

$$KV : VC = DU : UK = UT : TV \text{ und}$$
$$\begin{cases} KV : KC = DU : DK = UT : UV \text{ oder} \\ CV : CK = KU : KD = VT : VU \text{ d. h.:} \end{cases}$$

Zwei beliebige Tangenten der Parabel, KC und KD werden von jeder dritten UV in umgekehrtem Verhältniss geschnitten, nämlich in Bezug auf die Berührungspunkte CD und den gegenseitigen Durchschnittspunkt K derselben, und ferner wird die dritte Tangente UV durch ihren Berührungspunkt T in demselben Verhältniss getheilt. Ebenso verhält sich der erste Abschnitt jeder von jenen zwei Tangenten zur Ganzen, wie der zweite Abschnitt der andern zur Ganzen, oder wie der eine diesem zweiten Abschnitte anliegende Abschnitt der dritten Tangente zur Ganzen.

Es folgt daraus weiter:

Theilt man jeden Schenkel KC und KD eines beliebigen Dreiecks DKC in irgend eine Anzahl n gleiche Theile, verbindet je einen x^{ten} Theilungspunkt U in KC von K aus gezählt mit dem gleichvielten Theilungspunkt V in KD von D an gezählt, so sind die $n - 1$ Verbindungslinien Tangenten einer Parabel, welche die Schenkel KC, KD in ihren Endpunkten CD an der Grundlinie berührt und welche jede von jenen Linien UV in demjenigen Punkte T berührt, der sie so theilt, dass die Abschnitte sich umgekehrt verhalten, wie die anliegenden Zahlen x, $n - x$, welche anzeigen, die wievielten Theilungspunkte UV von K an gerechnet sie verbindet.

Da, wie bewiesen worden, $\frac{CV}{CK}=\frac{VT}{VU}$, $\frac{DK}{DU}=\frac{UV}{UT}$, $\frac{TU}{TV}=\frac{TU}{TV}$,

so ist das Product dieser drei Verhältnisse:

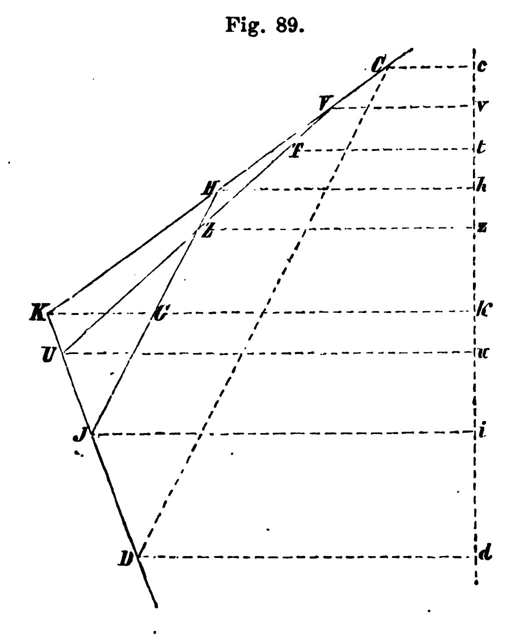
$$\frac{CV}{CK}\cdot\frac{DK}{DU}\cdot\frac{TU}{TV}=1\text{, also}$$

$$CV\,.\,DK\,.\,TU=CK\,.\,DU\,.\,TV,$$

welches beweist, dass die drei Strahlen KT, VD, UC aus den Ecken irgend eines der Parabel umgeschriebenen Dreiecks KVU nach den Berührungspunkten der gegenüberstehenden Seiten einander in irgend einem Punkte treffen.

Da $ku = tv$, wie schon bemerkt worden, und ferner $kz = tz$, so ist $uz = zv$ und folglich auch Z die Mitte von UV. Also: Die Mitten Z der Stücke, welche irgend zwei feste Tangenten

Fig. 89.



von allen übrigen (UV) begränzen, liegen in einer bestimmten Geraden, nämlich in derjenigen Tangente HJ, welche mit der Berührungssehne CD jener festen parallel ist, oder welche durch ihren Berührungspunkt G gehälftet wird. Oder anders: Zieht man durch jeden Punkt Z der Grundlinie HJ irgend eines ge-

gebenen Dreiecks HKJ zwischen den Schenkeln diejenige Gerade VZU, welche durch den Punkt gehälftet wird, so berühren alle diese Geraden eine bestimmte Parabel, welche dem Dreieck eingeschrieben ist, und zwar dessen Grundlinie in ihrer Mitte G, die Schenkel aber in deren Verlängerungen jenseits der Grundlinie um ihre eigene Länge berührt.

Da $vh = ui$, so bleibt das Verhältniss $HV : JU$ constant, wenn die drei Tangenten HKJ fest und VU veränderlich, und zwar ist $HV : JU = HK : JK = HC : JD$, d. h.:

Nimmt man in zwei beliebigen festen Geraden KD, KC zwei beliebige feste Punkte J, H an und bestimmt solche Punktenpaare U, V in den Geraden, deren Abstände von jenen festen Punkten sich verhalten wie die Abstände der letztern von dem Durchschnitte K der festen Geraden [jedoch müssen jene in Bezug auf die resp. festen Punkte J, H und auf K verkehrte Lage haben], so ist der Ort der Geraden UV eine bestimmte Parabel, welche die festen Geraden in denjenigen Punkten C, D berührt, welche doppelt so weit von ihrem Durchschnitte K entfernt sind, als die festen Punkte JH und welche die Gerade JH in ihrer Mitte berührt, und ferner ist der Ort der Mitte Z der veränderlichen Geraden UV die durch die festen Punkte bestimmte Gerade JH. Oder: Werden die Schenkel eines festen Dreiecks HKJ proportional geschnitten, jedoch je einer unter der Grundlinie in der Verlängerung und der andere über derselben, auch wohl in der Verlängerung über K hinaus, so wird die Schneidende UV stets von der Grundlinie HJ gehälftet, und umgekehrt, wird sie von dieser gehälftet, so schneidet sie jene proportional. In beiden Fällen kommen natürlich die eben abgeleiteten Parabelsätze in Betracht.

Angenommen, HJ sei eine beliebige Tangente der Parabel, d. h. nicht gerade von den zwei ersten KC, KD so abhängig, dass der Durchmesser GA_∞ durch K geht, so kann man leicht zeigen, dass, wenn jene drei fest sind, jede vierte Tangente UV in constantem Verhältniss getheilt wird, nämlich dass

$$VZ : ZU = HG : GJ \; [= KJ : JD = CH : HK].$$

Denn vermöge je dreier Tangenten hat man zufolge vorhergehender Sätze z. B.

$ZG : GJ = TZ : ZU$ [in Betracht des Tangentendreiecks ZUJ]
$ZG : GH = TZ : ZV$ [in Betracht des Tangentendreiecks ZHV]
daher $VZ : ZU = HG : GJ$.

Dadurch lassen sich alle vorstehenden Sätze allgemeiner aussprechen. Auch folgen daraus Sätze über das vollständige Vierseit mit Bezug auf die ihm eingeschriebene Parabel. Theilt man nämlich das Stück HJ irgend einer der vier gegebenen Geraden, welches zwischen zweien KH, KJ liegt, in gleichem Verhältniss [im Punkte G], wie das Stück UV der vierten, welches zwischen denselben zweien liegt, von der dritten [in Z] getheilt wird, und wird dieses mit Verwechslung wiederholt, so erhält man die vier Punkte G, T, D, C, in welchen die eingeschriebene Parabel die vier Geraden berührt.

Da $vh = ui$, so folgt, dass die Mitten von vi und hu zusammenfallen; aus gleichen Gründen haben kz und vi einerlei Mitte, folglich haben die drei Strecken vi, hu, kz [wobei die HJ ganz beliebig ist] einen Punkt n zur gemeinschaftlichen Mitte; oder die drei Strahlenpaare Vv und Ji, Hh und Uu, Kk und Zz haben einen gemeinschaftlichen Mittelstrahl nN, welcher somit durch die Mitten der drei Diagonalen VJ, HU, KZ des vollständigen Vierseits geht. Dieses, verbunden mit früher bewiesenen Eigenschaften, gibt den Satz:

Die Mitten N der drei Diagonalen jedes vollständigen Vierseits liegen in einer bestimmten Geraden. Diese Gerade ist parallel der Parabelaxe, die dem Vierseit eingeschrieben ist; sie ist senkrecht auf der Fusspunktsgeraden [von dem Punkte B aus, dem einzigen, der eine solche ergeben kann], sowie auf der Geraden L, die durch die Durchschnittspunkte der Höhen der vier Dreiecke geht, aus denen das vollständige Vierseit besteht.

§ 21. **Quadratur der Parabel.**

Das Dreieck DKC, welches durch irgend zwei Tangenten und deren Berührungssehne DC gebildet wird, besteht aus einem Segment der Parabel $DGCD = S$ und einem concaven Tangentenwinkelstück $DKCGD = W$, welche sich wie folgt in Theile von constantem Verhältniss und zwar von 2:1 zerschneiden lassen:

Zieht man die dritte Tangente HJ parallel CD [oder zieht aus K nach der Mitte M von CD], so sind HGJ die Mitten der Geraden KC, KM, KD, und daher ist, wenn der Inhalt des

Dreiecks $DKC = d$ gesetzt wird: $\triangle\, JKH = \frac{1}{4}d$ und

$$\triangle\, DGC = \tfrac{1}{2}d, \text{ also}$$

$$\triangle\, JKH + \triangle\, DGC = \tfrac{3}{4}d \text{ und } (s_1 + w_1) + (s_2 + w_2) = \tfrac{1}{4}d.$$

Wird nun dieselbe Zerfällung auf die zwei Paar ähnlicherweise zusammengehörigen Räume s_1 und w_1, s_2 und w_2 angewendet, so erhält man ein analoges Resultat, so dass von diesen Räumen durch vier Dreiecke [wovon zwei dem Raume S und zwei dem Raume W angehören, und wo jene zwei doppelt so gross sind, als diese] $\frac{3}{4}$ ihres Inhalts abgesondert, und nur $\frac{1}{4}$ desselben übrig bleibt, und zwar unter der Form von vier Paar zusammengehörigen s und w. Da auf diese vier Paare weiter dasselbe Verfahren angewendet werden kann, so ist klar, dass nach der n^{ten} Construction die Summe der von S abgeschnittenen Dreiecke DGC etc.

Fig. 90.

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \cdots \frac{1}{2.4^{n-1}}\right) d,$$

der von W abgeschnittenen Dreiecke

$$JKH \text{ etc.} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \cdots \frac{1}{4^n}\right) d,$$

zusammen also die Summe der Dreiecke

$$= \tfrac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{4^{n-1}}\right) d$$

und demnach der noch nicht berücksichtigte Rest $= \frac{1}{4^n} d$ ist.

Dass dieser Rest, wenn n gross wird, zum Verschwinden klein werden muss, ist klar; daher muss jene doppelte Reihe von Dreiecken am Ende das Dreieck DKC oder D ganz erschöpfen, was auch schon der blossen Anschauung sich so darstellt, und da die gleichzeitigen Dreiecke sich verhalten, wie $2:1$, so muss folglich auch $S : W = 2 : 1$ sein, oder es ist $S = \frac{2}{3}d$ und $W = \frac{1}{3}d$ oder

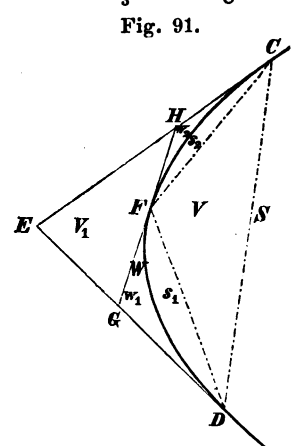
$$d : S : W = 3 : 2 : 1, \text{ d. h.:}$$

Das Dreieck DKC, welches irgend zwei Tangenten der Parabel mit der zugehörigen Berührungssehne (CD) einschliessen, wird durch den Parabelbogen in einem einfachen constanten Verhält-

niss getheilt, nämlich so, dass das Segment über der Sehne $CGDC$ sich zu dem im Tangentenwinkel $CKDGC$ verhält wie $2:1$, oder dass ersteres $\frac{2}{3}$ und das andere $\frac{1}{3}$ des genannten Dreiecks ist.

Zieht man die Strahlen CA_∞, DA_∞, die der Tangente HJ in C_1, D_1 begegnen, so entsteht das Parallelogramm CDD_1C_1, welches dem Segment $CGDC$ zugehört [oder so genannt werden soll], und welches offenbar $\frac{3}{2}$mal so gross ist, als dieses letztere [$\triangle\ KGH = CC_1H$, $KGJ = DD_1J$]. Also: Jedes Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$mal so gross als das zugehörige Parallelogramm.

Fig. 91.



Aus dem vorhin aufgestellten Satze folgt unmittelbar eine eben so einfache Relation zwischen den Inhalten zweier zusammengehöriger Vielecke [n Ecke], die der Parabel ein- und umschrieben sind, und wobei die Ecken des ersten zugleich die Berührungspunkte der Seiten des andern sind.

Betrachtet man unter dieser Bedingung z. B. zwei Dreiecke DFC und GEH, deren Inhalte [oder Flächen] durch V, V_1 bezeichnet werden mögen, so dass das Segment S in die drei Theile V, s_1, s_2 und das Tangentenwinkelsegment W in die drei Theile V_1, w_1, w_2 zerlegt ist, dann hat man:

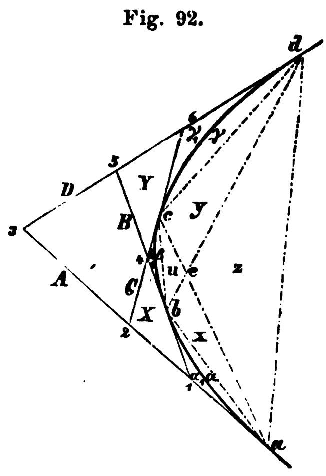
$$W = \tfrac{1}{2} S,\ w_1 = \tfrac{1}{2} s_1,\ w_2 = \tfrac{1}{2} s_2 \text{ also}$$
$$W - w_1 - w_2 = \tfrac{1}{2}(S - s_1 - s_2) \text{ und desshalb}$$
$$V_1 = \tfrac{1}{2} V.$$

Man hat also den Satz: Der Inhalt des umschriebenen Dreiecks ist halb so gross als der des zugehörigen eingeschriebenen Dreiecks.

Betrachtet man ferner irgend vier Punkte a, b, c und d, die in der Parabel liegen, nebst den zugehörigen Tangenten $ABCD$, so bestimmen jene, sowie diese, drei verschiedene einfache Vierecke, welche einander paarweise entsprechen, und von denen zu zeigen ist, dass ihre Inhalte in dem Verhältniss von $2:1$ stehen. Von den drei eingeschriebenen Vierecken ist das eine $abcda$ convex, und die zwei übrigen $abdca$ und $adbca$ sind überschlagen; von den umgeschriebenen ist eines, $ADBC$

convex, das zweite *ABCD* concav [d. h. mit einspringenden Winkel] und das dritte *ABDC* überschlagen. Es entspricht aber nicht das convexe dort dem convexen hier, sondern sie ent-

Fig. 92.

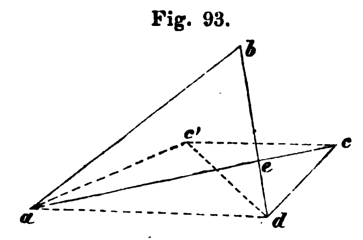


sprechen sich, wie schon aus der Bezeichnung hervorgeht, in folgender Ordnung:

I. *abcd* [convex] entspricht *ABCD* [concav]
II. *abdc* [überschlagen] entspricht *ABDC* [überschlagen].
III. *adbc* [überschlagen] entspricht *ADBC* [convex].

Der dritte Fall nöthigt also von selbst, wofern nämlich ein allgemein gültiges Gesetz aufgestellt werden soll, über den Inhalt des überschlagenen Vierecks sich zu verständigen. Sei *abdc'*

Fig. 93.



ein concaves Viereck, so ist dessen Inhalt gleich der Differenz der Inhalte der Dreiecke *abd* und *ac'd*. Wenn also *c'* auf einer Parallelen zu *ad* sich bewegt, während die Punkte *abd* fest bleiben, so ändert sich der Inhalt des Dreiecks *ac'd*, also auch der Inhalt des Vierecks *abdc'* nicht. Nimmt man die Richtig-

keit dieser Bemerkung auch für den Fall an, wo c' ausserhalb des Dreiecks abd liegt [z. B. nach c gekommen ist], wo also $abdca$ ein überschlagenes Viereck heisst, so ist der Inhalt desselben $= abd - adc$. Ist schliesslich e der Durchschnitt von bd und ac, so ist dem Inhalte nach:

$$\triangle\, abd = abe + aed$$
$$\triangle\, acd = aed + edc, \text{ also}$$
$$\text{Viereck } abedcea = abe - edc, \text{ d. h.:}$$

Der Inhalt eines überschlagenen Vierecks ist gleich der Differenz der Inhalte der beiden Dreiecke, aus denen es besteht.

Jetzt hat man zunächst für den Fall I:

Das convexe Viereck $abcd =$ Segment $abcda - \alpha - \beta - \gamma$ ferner (1 4 6 3) oder $ABCD =$ Arbelos $a3dcba - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1$; da jede obere Grösse nach dem Gleichheitszeichen doppelt so gross ist, als die entsprechende untere, so muss sein:

$$\text{Viereck } abcd = 2.\ \text{Viereck } ABCD.$$

Im Falle II ist $x + u = 2\,X$, $y + u = 2\,Y$, also $(x - y) = 2\,(X - Y)$ oder $(y - x) = 2\,(Y - X)$, also ist auch

$$\text{Viereck } abdc = 2.\ \text{Viereck } ABDC.$$

Für den Fall III bemerke man, dass das überschlagene Viereck $adbca$ aus den beiden Dreiecken ade und bce besteht; ihm entspricht das convexe Viereck $ADBC$ oder 3 5 4 2. Man hat nun:

$$\triangle\, acd = 2.\ \triangle\, 2\ 3\ 6$$
$$\triangle\, bcd = 2.\ \triangle\, 4\ 5\ 6, \text{ also}$$
$$2\,(\triangle\, 236 - \triangle\, 456) = \triangle\, acd - \triangle\, bcd = \triangle\, aed - \triangle\, bec, \text{ d. h.}$$
$$\text{Viereck } adbc = 2.\ \text{Viereck } ADBC.$$

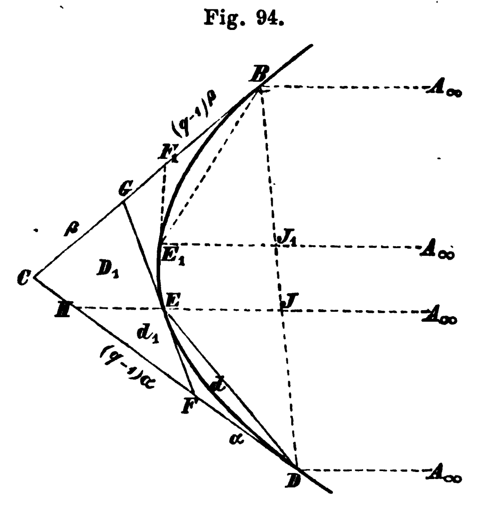
Ebenso kann gezeigt werden, dass, wenn man in der Parabel fünf beliebige Punkte annimmt und dieselben nach irgend einer Ordnung der Reihe nach durch Gerade verbindet, das dadurch entstehende Fünfeck, welche Form es immerhin haben mag, allemal doppelt so gross ist als das zugehörige umgeschriebene Fünfeck, dessen Seiten die Tangenten in den Ecken des angenommenen sind, und welche Seiten in ganz entsprechender Ordnung in ihren Schnittpunkten die Ecken erzeugen, so dass also dieses Gesetz für alle zwölf Paare von Fünfecken, welche durch jene fünf Punkte bestimmt sind, zugleich stattfindet. Dasselbe ist für sechs, sieben etc. n Punkte der Fall, so dass man allge-

mein behaupten kann: Der Inhalt jedes beliebigen der Parabel eingeschriebenen *n*Ecks ist doppelt so gross, als der Inhalt des zugehörigen umschriebenen *n*Ecks. Hierdurch ist also auch zu entscheiden, was bei gewissen, auch wohl sehr verwickelten Fünfecken oder *n*Ecken unter deren Inhalt zu verstehen sei.

Es lässt sich nun ferner zeigen, dass der Inhalt der Parabelsegmente nach einem einfachen, bestimmten Gesetz von der Höhe, oder dem Abstande der beiden Durchmesser von einander abhängt, zwischen denen das Segment liegt.

Es seien *CB, CD* irgend zwei feste, und *GF* eine beliebige dritte Tangente. Durch den Berührungspunkt *E* gehe der Strahl HEA_∞ parallel der Axe, so ist $HF = FD$. Es kann immer

Fig. 94.



$DF : DC = 1 : q$ gesetzt werden, wo q irgend welche Zahl bedeutet. Dann ist auch $CG : CB = 1 : q$ und ebenso $FE : FG = 1 : q$. Hiernach folgt, wenn $\triangle\, DCB = D$, $\triangle\, FCG = D_1$, $\triangle\, DEF = d$ und $\triangle\, FEH = d_1$ gesetzt und bemerkt wird, dass D und D_1 bei C und D_1 und d_1 bei F einen gemeinschaftlichen Winkel haben:

$$D_1 = \frac{1 \cdot (q-1)}{q \cdot q} D \left[\text{nämlich} = \frac{1 \cdot \beta\,(q-1)\,\alpha}{q\,\beta \cdot q\,\alpha} \cdot D\right]$$

$$d_1 = \frac{1 \cdot 1}{(q-1)\,q} \cdot D_1$$

$$d = d_1, \text{ folglich}$$

$$d = \frac{1^3}{q^3}\, D.$$

Wird noch bemerkt, dass $DF : DC = DJ : DB = 1 : q$, so folgt aus der letzten Gleichung zunächst der Satz: Die Inhalte (d, D) irgend zweier Tangentensehnendreiecke (DCB, DFE), welche eine gemeinschaftliche Tangente DFC haben [in der ihre Grundlinien liegen], verhalten sich wie die Cuben der Abstände $(DJ : DB)$ der Durchmesser DA und EA, DA und CA, zwischen denen die Dreiecke liegen.

Läge das kleinere Dreieck DFE an der festen Tangente bei B, wie BF_1E_1, und hätten die Durchmesser E_1A, BA gleiche Höhe, wie diejenigen, zwischen denen DFE liegt, also $BJ_1 = DJ$, so würde auch $BF_1 : BC = BJ_1 : BD = 1 : q$ sein, und folglich $\triangle BF_1E_1 = \frac{1^3}{q^3} D$ und somit $\triangle BF_1E_1 = DFE$ sein. Es ist aber auch klar, dass, welche Lage diese Dreiecke haben mögen, sie immer auf ein und dasselbe Dreieck DCB, welches mit jedem von jenen eine Tangente gemein hat, bezogen werden können.

Daher folgt weiter: Bei einer und derselben Parabel haben Tangentensehnendreiecke (DFE, BF_1E_1), welche zwischen Durchmessern von gleicher Höhe [oder gleichem Abstande von einander] liegen, gleichen Flächeninhalt, und auch umgekehrt. Ferner: Je zwei Tangentensehnendreiecke bei der nämlichen Parabel [resp. ihre Inhalte] verhalten sich wie die Cuben der Höhen der zwei Paar Durchmesser, zwischen denen sie liegen. Diese Sätze lassen sich nach Früherem unmittelbar auf die Segmente der Parabel, und zwar sowohl auf die über den Sehnen DE und DB als die in den Tangentenwinkeln (die Arbelen) übertragen; nämlich jede Art für sich betrachtet verhält sich dem Inhalte nach, wie die Cuben ihrer Höhe in Bezug auf die Durchmesser, welche durch die Endpunkte ihrer Sehnen gehen.

Betrachtet man mit dem Dreieck DFE zugleich das Dreieck BGE, welche zusammen die Höhe des Dreiecks DCB haben, so hat man für jenes, wenn dessen Inhalt durch δ bezeichnet und bemerkt wird, dass $BG : BC = q - 1 : q$, $\delta = \frac{(q-1)^3}{q^3} D$; oder für beide hat man: $\sqrt[3]{d} = \frac{1}{q} \sqrt[3]{D}$, $\sqrt[3]{\delta} = \frac{q-1}{q} \sqrt[3]{D}$ und folglich

$$d^{\frac{1}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}} = D^{\frac{1}{3}};$$

d. h.: Ist die Höhe oder Abstand der Durchmesser, zwischen welchen irgend ein Tangentensehnendreieck liegt, so gross als die Summe der Höhen, welche irgend zwei andern Dreiecken, in

gleichem Sinne genommen, zukommen: so ist die Cubikwurzel aus dem Inhalte jenes Dreiecks der Summe der Cubikwurzeln aus den Inhalten der zwei andern gleich. Dieser Satz ist nämlich nach dem allgemeinen Ausdrucke, wie er hier abgefasst ist, richtig, nicht blos für den Fall, wo die drei Sehnen oder Grundlinien (*DB*, *DE*, *EB*) der in Rede stehenden Dreiecke ein der Parabel eingeschriebenes Dreieck bilden, von welchem Falle die Betrachtung ausging.

Bezeichnet man die Inhalte der Segmente, welche über den Grundlinien jener drei Dreiecke liegen, durch S, s und σ, so ist gleicherweise:

$$s^{\frac{1}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} = S^{\frac{1}{3}},$$

d. h.: Ist die Höhe eines beliebigen Parabelsegments in Bezug auf die Durchmesser so gross als die Summe der Höhen irgend zweier anderer Segmente derselben Parabel, so ist die Cubikwurzel aus dem Inhalte des ersten Segments gleich der Summe der Cubikwurzeln aus den Inhalten der zwei letztern Segmente.

Durch Wiederholung lässt sich dieser Satz, sowie auch der vorige, stufenweise auf beliebig viele [vier, fünf, sechs, . . . n] Segmente ausdehnen, wodurch man zu dem folgenden, scheinbar allgemeinern Resultate gelangt: Ist die Höhe eines Parabelsegments in Beziehung auf die Durchmesser, zwischen denen es liegt, so gross als die Summe der Höhen von irgend n andern Segmenten der nämlichen Parabel, so ist die Cubikwurzel aus jenem der Summe der Cubikwurzeln aus den letztern gleich. Oder in einer Formel, in welcher die Bedeutung der einzelnen Zeichen leicht zu erkennen ist:

$$S^{\frac{1}{3}} = s_1^{\frac{1}{3}} + s_2^{\frac{1}{3}} + s_3^{\frac{1}{3}} \cdot \cdot \cdot \cdot s_n^{\frac{1}{3}}.$$

Insbesondere folgt daraus: Ist irgend ein convexes $(n + 1)$ Eck einer Parabel eingeschrieben, so ist die Cubikwurzel des Segments über der einschliessenden Seite der Summe der Cubikwurzeln der Segmente über den übrigen n Seiten gleich. Haben die letztern n Segmente unter sich gleiche Höhen, so haben sie auch gleiche Inhalte, so dass $S^{\frac{1}{3}} = n \cdot s_1^{\frac{1}{3}}$ oder $S = n^3 s_1$. Wird ferner der Inhalt des $(n + 1)$ Ecks durch V bezeichnet, so ist $V = S - n s_1$. Beide Gleichungen verbunden [durch Elimination von s_1] ergeben:

$$V = \frac{n^2 - 1}{n^2} S.$$

Diese Formel zeigt, wie der Inhalt V eines der Parabel eingeschriebenen $(n+1)$ Ecks, dessen Seiten alle, ausgenommen die Grundlinie [oder die grösste], gleiche Höhe haben, aus dem Inhalte des Segments über der Grundlinie zu finden ist, oder auch umgekehrt, dieser aus jenem, nämlich

$$S = \frac{n^2}{n^2-1} V.$$

Aus der ersten Gleichung folgt ferner:

$$V = n(n^2-1)s = (n-1)n(n+1)s,$$

$$Ss^2 = (S-V)^3 \text{ oder } s = (S-V)\sqrt{1-\frac{V}{S}}, \text{ endlich}$$

$$V = S - s^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{3}} = (S^{\frac{2}{3}} - s^{\frac{2}{3}}) S^{\frac{1}{3}}.$$

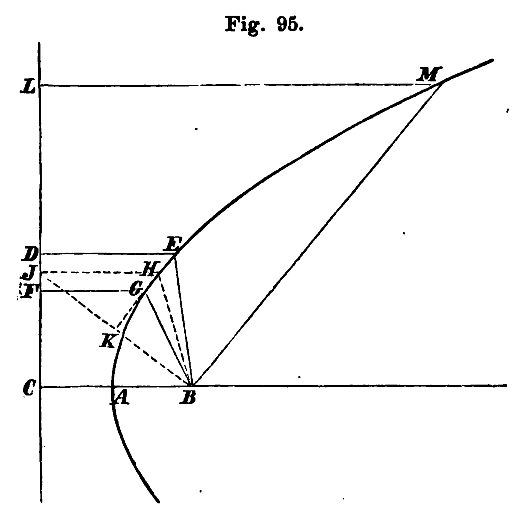
Ist insbesondere $n = 2$, so gibt die Formel: $V = \frac{n^2-1}{n^2} S$ ein bekanntes Resultat, welches nämlich das Verhältniss eines Segments zu dem grössten Dreieck über seiner Sehne anzeigt, es ist $S : V = 4 : 3$. Aber auch für jeden andern Werth von n hat unter den gegenwärtigen Bedingungen, dass nämlich die n Seiten einerlei Höhe haben, das Vieleck für eine gegebene Höhe der Grundlinie den grössten Inhalt.

Ein anderes Verfahren, die Parabel zu quadriren, beginnt damit, dass der Inhalt irgend eines Sectors aus dem Brennpunkte B bestimmt wird, und zwar durch Hülfe des ihm entsprechenden gemischtlinigen Vierecks, welches zwischen dem Bogen, der Leitlinie L und den beiden aus den Endpunkten des Bogens auf die Leitlinie gefällten Perpendikeln liegt. Der Sector ist stets die Hälfte von diesem Viereck. Daraus wird sofort auch der Inhalt jedes beliebigen Segments gefunden, sobald seine Lage und seine Höhe über der Axe gegeben sind. Aber auch umgekehrt kann aus dem oben gefundenen Ausdrucke für den Inhalt des Segments der Inhalt des Sectors, oder dessen Verhältniss zu dem genannten Viereck bestimmt werden.

Es sei B der Brennpunkt, CD die Leitlinie und A der Scheitel einer Parabel AGE. Aus irgend einem Punkte H der Parabel ziehe man die Geraden HB und HJ, die erste nach dem Brennpunkte und die andere senkrecht auf die Leitlinie, so ist $HB = HJ$. Ferner ziehe man die Gerade BJ und die Tangente in H, nämlich HK, so steht diese auf jener senkrecht und hälftet

sie in K, so dass $BK = JK$. Nimmt man nun in der Tangente HK auf beiden Seiten von H zwei Punkte G und E, welche gleichweit von H entfernt sind, und zieht aus denselben die Geraden GB und EB, GF und ED, wovon die zwei letztern senkrecht auf CD stehen, also parallel HJ laufen, so ist, wie man

Fig. 95.



sieht, das Paralleltrapez $DEGF$ doppelt so gross als das Dreieck BGE, denn es ist

$$DEGF = JK \,.\, GE \text{ und } \triangle\, BGE = \frac{BK \,.\, GE}{2},$$

wo, wie vorhin bemerkt, $JK = BK$. Denkt man sich nun die beiden Punkte G und E sehr nahe, oder unendlich nahe an H, so kann man sie als in der Parabel liegend ansehen, und es folgt sodann, dass ein Sector $BGHE$, dessen Bogen GHE unendlich klein ist, halb so gross sei als das zugehörige Paralleltrapez $DEHGF$, welches den nämlichen Bogen EHG zur Seite hat.

Nun lassen sich aber jeder beliebige Sector BGM und das ihm entsprechende gemischtlinige Paralleltrapez $LMEGF$ in solche unendlich kleine Elemente zerlegen, welche paarweise das Verhältniss 1 : 2 haben, wie die Elemente $BGHE$ und $DEHGF$, daher müssen auch sie, als die Summen dieser Elemente, das nämliche Verhältniss zu einander haben. Daraus schliesst man folgenden Satz, von welchem aus alle mit der Quadratur der Parabel zusammenhängenden Fragen behandelt werden können:

Jeder Parabelsector $BGEMB$ zwischen zwei Strahlen BG, BM, die vom Brennpunkte ausgehen, hat halb so grossen Flächeninhalt als das ihm zugehörige gemischtlinige Parabeltrapez $FGEMLF$, welches den Bogen GEM jenes Segments, die aus den Endpunkten G, M desselben auf die Leitlinie gefällten Perpendikel GF, ML und das zwischen diesen liegende Stück FL der Leitlinie zu Seiten hat.

Gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte.

Sechstes Kapitel.

Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte.

§ 22. Construction der Kegelschnitte aus gegebenen Elementen.

Die vorangehenden Kapitel über Ellipse, Hyperbel und Parabel zeigen genugsam, wie eine Reihe von Eigenschaften, welche für eine einzelne dieser Curven bewiesen wurden, ihre Gültigkeit für alle Kegelschnitte behalten. Wenn auch Ellipse und Hyperbel sich gegenseitig bedeutend näher stehen als jede von ihnen der Parabel, so ist doch in den meisten Fällen keine Schwierigkeit vorhanden, Sätze, welche von den beiden ersten gelten, auf die letztere zu übertragen, indem man einfach berücksichtigt, dass der zweite Brennpunkt der Parabel der unendlich entfernte Punkt ihrer Axe ist. Einige Beispiele, die sich aus den frühern Entwicklungen von selbst darbieten, zeigen diess deutlich.

1) Der Ort aller derjenigen Punkte, welche gleichweit abstehen von einem festen Punkte B und von einem festen Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$, ist ein Kegelschnitt, welcher A und B zu Brennpunkten und den Radius $2a$ zur grossen Axe hat. Liegt B ausserhalb des Kreises, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, liegt B innerhalb des Kreises, so erhält man eine Ellipse. Um die Parabel zu erzeugen, lässt man einfach den Kreis in eine Gerade übergehen, welche dann zur Leitlinie der Parabel wird.

2) Die Gegenpunkte des Brennpunktes B eines Kegelschnittes in Bezug auf sämmtliche Tangenten desselben liegen in einem Kreise, welcher den andern Brennpunkt A zum Mittelpunkt und

die grosse Axe des Kegelschnitts zum Radius hat. Für die Parabel rückt der Mittelpunkt dieses Kreises in's Unendliche und der Kreis selbst wird zur Geraden [der Leitlinie].

3) Fällt man vom Brennpunkte B eines Kegelschnitts Perpendikel auf sämmtliche Tangenten desselben, so liegen deren Fusspunkte in einem Kreise, der über der grossen Axe des Kegelschnitts als Durchmesser beschrieben ist. Im Falle der Parabel geht dieser Kreis in die Scheiteltangente über.

4) Die Tangente in irgend einem Punkte des Kegelschnitts bildet mit den zugehörigen Brennstrahlen gleiche Winkel. Bei der Ellipse geht die Tangente ausserhalb, bei der Hyperbel zwischen den beiden Brennpunkten durch; bei der Parabel geht der eine Brennstrahl parallel der Axe.

5) Bewegt sich ein Punkt C derart, dass sein Abstand p von einem festen Punkte B zu seinem Abstande q von einer festen Geraden L in einem bestimmten constanten Verhältniss $\frac{p}{q} = \lambda$ steht, so ist sein Ort ein Kegelschnitt mit B als Brennpunkt und L als zugehöriger Leitlinie, und zwar für $\lambda < 1$ eine Ellipse, für $\lambda = 1$ eine Parabel und für $\lambda > 1$ eine Hyperbel.

Auf diese Sätze gestützt, kann man nun eine Reihe von Aufgaben lösen, welche die Bestimmung der Kegelschnitte aus gegebenen Elementen betreffen.

Um den Kegelschnitt zu construiren, wurden früher immer die Brennpunkte und die grosse Axe als bekannt vorausgesetzt. Wir wollen nun die grosse Axe eines Kegelschnitts bestimmen, von welchem die Brennpunkte A und B und eine Tangente G gegeben sind. Man suche den Gegenpunkt A' von A in Bezug auf G, so ist BA' die grosse Axe des Kegelschnitts. Derselbe ist eine Hyperbel, wenn G die Gerade AB auf der Strecke AB und eine Ellipse, wenn G die Gerade AB ausserhalb der Strecke AB trifft. Man könnte auch so verfahren: Durch Halbirung der Strecke AB findet man den Mittelpunkt M. Fällt man nun von A aus ein Perpendikel auf G, dessen Fusspunkt F sein möge, so schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkte M und dem Radius MF auf der Geraden AB die Endpunkte der grossen Axe aus. Liegt der Brennpunkt A in unendlicher Entfernung, so kann er nicht verzeichnet werden, aber er ist vollständig bestimmt, sobald man die Richtung, in welcher er liegt, angibt. Zieht man dann

durch B eine Gerade parallel dieser Richtung, so ist dieselbe die Axe aller Parabeln, welche B und A_∞ zu Brennpunkten haben. Nach dem Vorhergehenden muss also die Parabel bestimmt sein, sobald man von ihr den Brennpunkt B, die Axe BA_∞ und eine Tangente G kennt. In der That findet man einen Punkt der Leitlinie, indem man den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf G construirt. Das Perpendikel von B' auf BA_∞ ist dann die Leitlinie selbst, welche mit dem Brennpunkt zusammengenommen die Parabel vollständig bestimmt. Oder auch: Der Fusspunkt F des von B auf G gefällten Perpendikels ist ein Punkt der Scheiteltangente, welche dadurch gegeben ist, und mit dem Brennpunkte die Parabel bestimmt.

Wenn von einem Kegelschnitte ein Punkt C und die Brennpunkte A und B gegeben sind, so ist derselbe nicht eindeutig bestimmt, sondern kann entweder eine Ellipse mit der grossen Axe $AC + CB$, oder eine Hyperbel mit der grossen Axe $AC - CB$ [abgesehen vom Vorzeichen] sein. Dass in der That zwei Kegelschnitte durch A, B, C bestimmt sind, wird durch die folgende Betrachtung klar: Bei jedem Kegelschnitte bildet die Tangente in einem beliebigen Punkte mit den zugehörigen Leitstrahlen nach den Brennpunkten gleiche Winkel. Zieht man also die Geraden AC und CB und halbirt den Winkel, so ist die Halbirungsgerade die Tangente im Punkte C des Kegelschnittes; durch diese Tangente und die Brennpunkte ist nun nach dem Vorigen der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Aber die Geraden AC und CB bilden mit einander vier Winkel, welche zwei zu einander senkrechte Halbirungsgerade zulassen, G und G', von denen jede mit A und B einen Kegelschnitt bestimmt, und zwar die eine eine Ellipse, die andere eine Hyperbel. Ellipse und Hyperbel schneiden einander ausser in C noch in drei andern Punkten, welche zu C in Bezug auf die gemeinsamen Axen der beiden Kegelschnitte symmetrisch sind. Da in jedem dieser vier Punkte die Hyperbeltangente und die Ellipsentangente senkrecht zu einander stehen, so sagt man, dass auch die Ellipse und die Hyperbel in ihren vier Schnittpunkten senkrecht auf einander stehen.

Liegt der Brennpunkt A in unendlicher Entfernung, so gehen sowohl die Ellipse als die Hyperbel in Parabeln über. Diess bestätigt sich auch wie folgt: Durch den Brennpunkt B und die Axe BA_∞ ist die Parabel noch nicht bestimmt. Kennt man nun

noch einen Punkt C derselben, so kann man die Tangente in diesem Punkte finden, indem man den Winkel der Strahlen CB und CA_∞ halbirt. A_∞ kann aber sowohl auf der einen als auf der andern Seite von B als im Unendlichen liegend angenommen werden, demzufolge lassen die Strahlen CB und CA_∞ zwei winkelhalbirende Gerade zu, die senkrecht auf einander stehen. Also: Es gibt zwei Parabeln, die einen Punkt B zum Brennpunkt und eine Gerade BA_∞ zur Axe haben und welche zugleich durch einen Punkt C gehen. Diese Parabeln schneiden sich im Punkte C und dem Gegenpunkte von C in Bezug auf die gemeinschaftliche Axe rechtwinklig, da ihre Tangenten in dem betreffenden Punkte sich rechtwinklig schneiden.

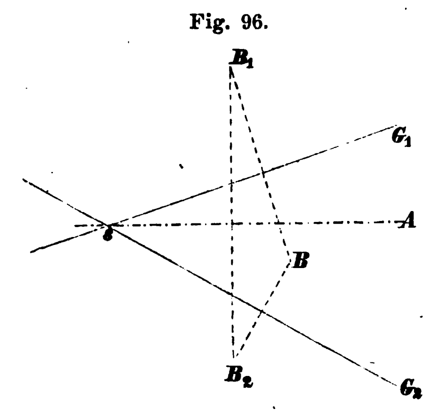
Durch diese Sätze gewinnt man eine Uebersicht über die unendlich vielen Kegelschnitte, welche zwei Punkte A und B zu gemeinschaftlichen Brennpunkten haben; solche Kegelschnitte heissen homofocal. Wir setzen zunächst voraus, dass keiner der Brennpunkte im Unendlichen liege, dann ist die Mitte M von AB gemeinsamer Mittelpunkt der Kegelschnitte; dieselben haben überdiess AB und die in M senkrecht auf AB errichtete Gerade zu gemeinsamen Axen [nur der Lage, nicht der Grösse nach]. Jede beliebige Gerade G ist Tangente eines, aber auch nur eines der Kegelschnitte der Schaar; derselbe ist Hyperbel oder Ellipse, je nachdem G die Gerade AB auf der Strecke AB oder ausserhalb derselben schneidet. Durch jeden Punkt C gehen zwei Kegelschnitte, welche sich in vier symmetrisch zu den Axen gelegenen Punkten schneiden, von denen einer C ist. Einer der Kegelschnitte ist Hyperbel, der andere Ellipse; in den vier Schnittpunkten stehen sie senkrecht zu einander. Die Schaar confocaler Kegelschnitte zerfällt demnach in eine Schaar Ellipsen und eine Schaar Hyperbeln. Jede Curve der einen Art schneidet keine Curve derselben Art, aber jede Curve der andern Art, und zwar in vier Punkten rechtwinklig.

Fällt der eine Brennpunkt in unendliche Entfernung, so werden Ellipsen und Hyperbeln zu Parabeln von gleichem Brennpunkt und gleicher Axe. Man erhält also zwei Schaaren confocaler Parabeln, die sich dadurch unterscheiden, dass die Scheitel der einen Schaar auf der einen Seite des Brennpunkts, die Scheitel der andern auf der andern Seite desselben liegen. Eine Parabel der einen Schaar schneidet keine Parabel derselben Schaar, aber

ede der andern Schaar in zwei Punkten, die symmetrisch zur Axe liegen, rechtwinklig.

Durch einen Brennpunkt B und eine Tangente G_1 ist ein Kegelschnitt noch nicht bestimmt, man weiss nur, dass der Kreis um den andern Brennpunkt A mit der grossen Axe $2a$ des Kegelschnitts als Radius beschrieben durch den Gegenpunkt B_1 von B in Bezug auf G_1 geht. Tritt nun zu B und G_1 noch eine zweite Tangente G_2, so muss der genannte Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$ sowohl durch B_1, als auch durch den Gegenpunkt B_2 von B in Bezug auf G_2 gehen. Daraus folgt,

Fig. 96.



dass der Ort der Brennpunkte A diejenige Gerade sA ist, welche in der Mitte von $B_1 B_2$ senkrecht steht. Diese Gerade geht durch den Schnittpunkt s der Geraden G_1 und G_2, denn da G_1 in der Mitte von BB_1 senkrecht auf BB_1 und G_2 in der Mitte von BB_2 senkrecht auf G_2 steht, so muss durch ihren Schnittpunkt s auch die in der Mitte von $B_1 B_2$ senkrecht auf $B_1 B_2$ gelegte Gerade sA gehen, es ist also s der Mittelpunkt des durch die Punkte $B_1 B B_2$ gelegten Kreises.

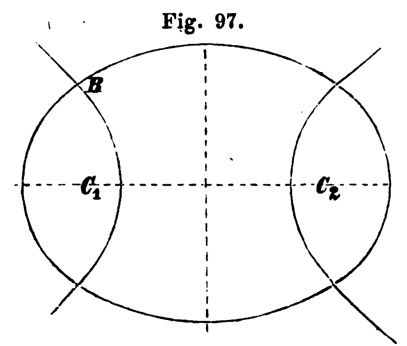
Umgekehrt weiss man nun, dass irgend ein auf sA gewählter Punkt als zweiter Brennpunkt eines Kegelschnitts betrachtet werden kann, der B zum ersten Brennpunkte und G_1 und G_2 zu Tangenten hat. Um zu entscheiden, in welchen Fällen Ellipse, Parabel oder Hyperbel eintritt, bemerken wir, dass, wenn der Kreis mit der grossen Axe eines Kegelschnitts als Radius und mit einem der Brennpunkte zum Mittelpunkte den andern Brennpunkt einschliesst, dann dieser Kegelschnitt eine Ellipse ist; schliesst der

Kreis den Brennpunkt aus, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, liegt der Brennpunkt auf dem Kreise selbst, so reduzirt sich der Kegelschnitt auf eine doppelt gelegte Gerade, und wenn der Kreis unendlich gross ist, so geht der Kegelschnitt in eine Parabel über.

Die Schaar von Kegelschnitten, welche B zum Brennpunkte haben und die beiden Geraden G_1 und G_2 berühren, zerfällt also in eine Schaar von Ellipsen, deren zweite Brennpunkte auf der einen Seite von s auf sA liegen, und eine Schaar von Hyperbeln, welche ihre zweiten Brennpunkte auf der andern Seite von s haben. Als Grenzfälle treten auf: die Gerade sB doppelt gelegt, und die Parabel, welche $B_1 B_2$ zur Leitlinie und eine Parallele zu sA durch B zur Axe hat. Die Mittelpunkte der Gesammtschaar dieser Kegelschnitte liegen in einer Geraden, welche in der Mitte zwischen B und sA parallel zu sA geführt wird; ihre grossen Axen gehen sämmtlich durch B, während die kleinen Axen eine Parabel umhüllen, welche B zum Brennpunkt und die Mittelpunktsgerade zur Leitlinie hat.

Wir untersuchen ferner die Schaar von Kegelschnitten, welche einen gemeinsamen Brennpunkt B und zwei gemeinsame Punkte C_1 und C_2 enthalten. Irgend ein Kegelschnitt dieser Schaar ist entweder Ellipse, Hyperbel oder Parabel [die speziellen Fälle dieser Curven mit eingeschlossen]. Sei zunächst der Kegelschnitt eine Ellipse mit dem zweiten Brennpunkt A, so ist $C_1 A + C_1 B = C_2 A + C_2 B$, weil beide der grossen Axe dieser Ellipse gleich sein

Fig. 97.



müssen. Daraus folgt, wenn wir zunächst voraussetzen, dass $C_2 B > C_1 B$ sei, $C_1 A - C_2 A = C_2 B - C_1 B$, d. h.: der Ort von A ist derjenige Zweig der Hyperbel durch B mit C_1 und C_2 zu Brennpunkten, welcher den Brennpunkt C_2 umschliesst. —

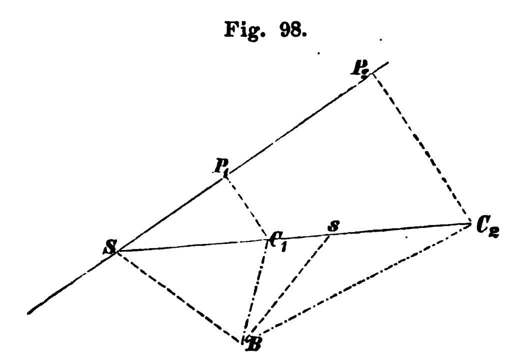
Soll einer der Kegelschnitte der Schaar eine Hyperbel sein, so müssen folgende verschiedene Fälle beachtet werden: 1) C_1 und C_2 liegen auf demselben Zweige der Hyperbel [er umschliesse nun A oder B] und 2) C_1 und C_2 liegen auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel. Im ersten Falle hat man entweder $C_1 B - C_1 A = C_2 B - C_2 A$ oder $C_1 A - C_1 B = C_2 B - C_2 A$, also $C_2 A - C_1 A = C_2 B - C_1 B$, d. h. der Ort von A ist der C_1 umschliessende Zweig der Hyperbel durch B mit den Brennpunkten C_1 und C_2. Im zweiten Falle ergibt sich [in Unterscheidung ob C_1 auf dem Zweige A und C_2 auf dem Zweige B liege oder umgekehrt], entweder $C_1 B - C_1 A = C_2 A - C_2 B$ oder $C_1 A - C_1 B = C_2 B - C_2 A$, also beidemale $C_1 A + C_2 A = C_1 B + C_2 B$, d. h. der Ort von A ist eine Ellipe, welche C_1 und C_2 zu Brennpunkten hat und durch B geht. Wenn schliesslich der durch B, C_1 und C_2 bestimmte Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so findet man als zweiten Brennpunkt einen der beiden unendlich entfernten Punkte der Hyperbel, welche C_1 und C_2 zu Brennpunkten hat, und welche durch B geht. Es gibt also zwei Parabeln, welche einen bestimmten Punkt zum Brennpunkte haben, und durch zwei gegebene Punkte gehen. Diess ergibt sich auch aus folgender Betrachtung: Construirt man einen Kreis, welcher einen beliebigen Punkt einer Parabel zum Mittelpunkte hat und durch den Brennpunkt derselben geht, so berührt er die Leitlinie. Soll also eine Parabel den Punkt B zum Brennpunkt haben und zugleich die Punkte C_1 und C_2 enthalten, so ist die Leitlinie gemeinschaftliche Tangente der Kreise, welche resp. C_1 und C_2 zu Mittelpunkten haben, und welche durch B gehen. Diese Kreise haben zwei Punkte gemein, lassen also auch zwei und nur zwei gemeinschaftliche Tagenten zu, demzufolge gibt es wirklich zwei Parabeln, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten.

Spezielle Fälle, welche diese Betrachtung darbietet, erledigen sich leicht, so dass wir nun allgemein den Satz aussprechen können: Der Ort der zweiten Brennpunkte aller derjenigen Kegelschnitte, welche einen gegebenen Punkt B zum Brennpunkte haben und durch zwei feste Punkte C_1 und C_2 gehen, besteht aus den beiden confocalen Kegelschnitten, welche C_1 und C_2 zu Brennpunkten haben, und welche zudem durch den Punkt B gehen.

Ist L die Leitlinie eines Kegelschnittes, welcher durch C_1 und C_2 geht und welcher B zum Brennpunkte hat, so gilt nach einer

Fundamentaleigenschaft der Kegelschnitte, wenn P_1 und P_2 die Fusspunkte der von C_1 und C_2 auf L gefällten Perpendikel sind,

Fig. 98.



die Relation: $\frac{BC_1}{C_1P_1} = \frac{BC_2}{C_2P_2}$ oder $BC_1 : BC_2 = C_1P_1 : C_2P_2$. Sei ferner S der Durchschnitt der Geraden C_1C_2 mit L, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke SP_1C_1 und SP_2C_2 auch $C_1S : C_2S = C_1P_1 : C_2P_2$, also ist $BC_1 : BC_2 = C_1S : C_2S$. Durch diese Proportion ist der Punkt S bestimmt, d. h. es gibt auf der Geraden C_1C_2 zwei Punkte, welche ihr genügen, einen, s, auf der Strecke C_1C_2 selbst, den andern, S, ausserhalb derselben. Man findet diese Punkte bekanntlich, indem man die Durchschnittspunkte der Halbirungsgeraden der Winkel, welche die Geraden BC_1 und BC_2 bilden, mit C_1C_2 construirt. [Die Punkte C_1, C_2, s, S sind also harmonische, und zwar die beiden ersten und die beiden letzten einander zugeordnet.] Es folgt nun der Satz: Soll ein Kegelschnitt durch zwei Punkte C_1 und C_2 gehen und einen bestimmten Punkt B zum Brennpunkt haben, so geht seine B entsprechende Leitlinie durch den einen oder den andern von zwei leicht zu construirenden, auf der Geraden C_1C_2 gelegenen Punkten. Diesem Satze kann man eine etwas andere Fassung geben. Da nämlich $C_1B : C_2B = C_1S : C_2S$ und $C_1B : C_2B = C_1s : C_2s$, so sind nach § 3 die Punkte S und s resp. die äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise, welche C_1 und C_2 zu Mittelpunkten haben und durch B gehen. Die Leitlinie irgend eines der vorhin genannten Kegelschnitte, welche dem gegebenen Brennpunkt zugehört, geht also entweder durch den einen oder durch den andern der Aehnlichkeitspunkte.

In § 11 ist gezeigt worden, wie der zweite Brennpunkt einer Ellipse gefunden wird, von welcher man den einen Brennpunkt B und drei Tangenten G_1, G_2, G_3 kennt. Man sucht die Gegenpunkte B_1, B_2, B_3 von B in Bezug auf G_1, G_2, G_3, so ist der Mittelpunkt A des durch diese Punkte gelegten Kreises der gesuchte zweite Brennpunkt. Nach den bisherigen Betrachtungen ist sofort klar, dass diese Construction nicht allein für die Ellipse, sondern für jeden beliebigen Kegelschnitt gilt. Daraus folgt, dass durch drei Tagenten und einen Brennpunkt der Kegelschnitt im Allgemeinen vollständig bestimmt ist, so dass also nur übrig bleibt, in jedem einzelnen Falle zu entscheiden, ob der Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Um diese Unterscheidung durchzuführen, halten wir die drei Tagenten fest, und wählen zunächst B in unendlicher Entfernung und zwar nach einer willkürlich bestimmten Richtung hin. Der Kegelschnitt ist dann eine Parabel, und zwar liegt deren Brennpunkt auf demjenigen Kreise, welcher dem Dreiecke $G_1 G_2 G_3$ umschrieben ist. Die Aufgabe, denselben zu finden, kommt auf die in § 19 behandelte zurück: Es ist ein Dreieck und der demselben umschriebene Kreis gegeben, ferner eine Gerade G; man soll auf der Kreislinie einen Punkt A so bestimmen, dass die Fusspunkte der von ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel in einer zu G parallelen Geraden liegen. In der That ist in unserm Falle die Gerade G irgend eine Senkrechte zu der Richtung des unendlich entfernten Brennpunktes B. Wird umgekehrt der Brennpunkt B auf dem Kreise angenommen, welcher dem Dreieck $G_1 G_2 G_3$ umschrieben ist, so liegt der zweite Brennpunkt A im Unendlichen, und zwar in einer Richtung, die sofort bestimmt werden kann.

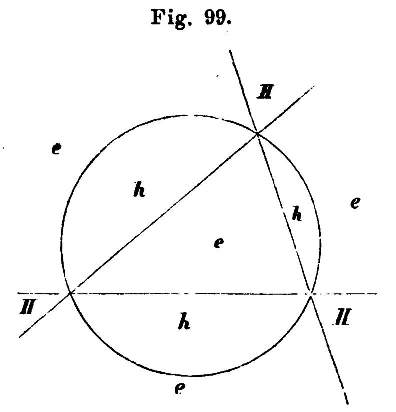
Wir nehmen ferner an, B befinde sich auf irgend einer der Dreieckseiten, z. B. G_3. Es fällt dann B_3 mit B selbst zusammen, also liegt A sowohl auf dem Perpendikel, das in der Mitte von B_1 und B [resp. B_3] errichtet wird, d. h. auf G_1, als auch auf G_2, es ist also A die Ecke des Dreiecks, welche G_3 gegenüberliegt. Befindet sich also B auf einer Seite des Dreiecks, so fällt A mit der gegenüberliegenden Ecke zusammen. Es ist demnach zwar im Allgemeinen A durch B vollkommen eindeutig bestimmt, wenn aber B mit einer der Ecken zusammenfällt, so kann A auf der gegenüberliegenden Seite willkürlich angenommen

werden. Jedesmal indess muss der Kegelschnitt in die doppeltgelegte Gerade AB zerfallen, die als Ellipse, Hyperbel oder Parabel angesehen werden kann.

Fällt B mit dem Mittelpunkte eines der vier Kreise zusammen, welche dem Dreiseit [oder Dreieck] $G_1 G_2 G_3$ eingeschrieben werden können, so vereinigen sich B und A, und der entsprechende Kegelschnitt ist der betrachtete Kreis selbst.

Verändert der Punkt B seine Lage stetig, so wird der zugehörige Kegelschnitt sich ebenfalls stetig ändern, und wird also von der Ellipse zur Hyperbel, oder von der Hyperbel zur Ellipse

Fig. 99.



nur dann übergehen, wenn er sich zuvor in einen der Uebergangskegelschnitte [Parabel oder doppeltgelegte Gerade] verwandelt hat. Nun wird aber die Ebene durch das Dreieck $G_1 G_2 G_3$, die unendlich entfernte Gerade und den dem Dreieck umschriebenen Kreis in eilf Theile getheilt, derart, dass der Punkt B in einem der mit e bezeichneten Abschnitte liegen muss, damit der gehörige Kegelschnitt eine Ellipse, und in einem der mit h oder H bezeichneten, damit derselbe eine Hyperbel sei. Die speziellen Fälle sind bereits erledigt, jetzt auch die ganze geforderte Unterscheidung.

Will man einen Kegelschnitt construiren, welcher durch drei Punkte $C_1 C_2 C_3$ geht, und einen bestimmten Punkt B zum Brennpunkt hat, so beachte man zunächst, dass, da der Kegelschnitt jedenfalls durch C_1 und C_2 geht, seine B zugehörige Leitlinie nothwendiger Weise entweder durch den äussern oder den innern

Aehnlichkeitspunkt derjenigen Kreise gehen muss, welche C_1 und C_2 zu Mittelpunkten haben und durch B gehen. Zieht man nun noch den Kreis, welcher C_3 zum Mittelpunkt hat und durch B geht, so findet sich durch Combination der drei Punkte $C_1 C_2 C_3$ zu zweien, dass die zu B gehörende Leitlinie des gesuchten Kegelschnitts drei der sechs Aehnlichkeitspunkte enthalten muss, welche die drei genannten Kreise erzeugen, und zwar muss jede der drei angegebenen Combinationen für jede der Leitlinien berücksichtigt werden. Der § 3 zeigt nun, dass vier solche Leitlinien existiren, nämlich die drei äussern Aehnlichkeitspunkte der Kreise liegen in einer derselben, und jeder der drei äussern Aehnlichkeitspunkte mit den beiden ihm nicht zugehörigen innern in einer andern. Es gibt also vier Kegelschnitte, welche durch drei Punkte gehen und einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt haben.

§ 23. Die Polarfigur des Kreises.

Eine Reihe von Eigenschaften der Kegelschnitte lassen sich aus Eigenschaften des Kreises ableiten, indem man sich der Sätze bedient, welche in § 6 aufgestellt worden sind.

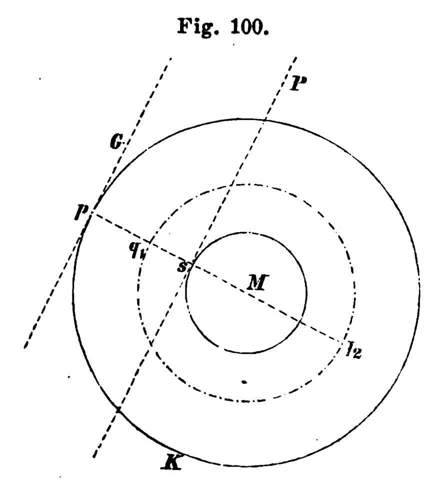
Zu jedem Punkte p in der Ebene gehört in Bezug auf einen Kreis M stets eine, aber auch nur eine Polare P, während zu einer beliebigen Geraden P stets ein, aber auch nur ein Pol gehört. Es gilt zudem der Satz, dass die Polare auf der Verbindungsgeraden des Pols mit dem Mittelpunkte des Polarisationskreises senkrecht steht. Wird der Kreis festgehalten, während der Punkt p sich verändert, so verändert sich auch seine Polare, und zwar so, dass die Bewegung der Polaren durchaus durch die Bewegung des Pols bestimmt ist. Umgekehrt, bewegt sich die Gerade P, so bewegt sich auch ihr Pol p, und zwar ist die Ortsveränderung von p vollständig durch diejenige von P bestimmt. Lässt man nun p irgend eine Curve C durchlaufen, so bewegt sich die Polare P als Tangente einer andern Curve C_1, welche durch C und M bestimmt ist. Wenn p_1 und p_2 zwei unmittelbar auf einander folgende [unendlich nahe] Lagen des Punktes p sind und G die sie verbindende Gerade, ferner P_1 und P_2 die Polaren von p_1 und p_2 [die sich ebenfalls unendlich nahe liegen, d. h. einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden] und s ihr Schnittpunkt, so bieten sich folgende Verhältnisse dar: G ist die Tangente von C in dem Punkte p_1 [oder p_2], weil die Tangente in irgend einem

Punkte einer Curve die Verbindungsgerade zweier unmittelbar auf einander folgender Punkte ist. Ebenso ist s der Berührungspunkt der Tangente P_1 [oder P_2] der Curve C_1. Es entspricht also der Curve C die Curve C_1 nicht nur, wenn man C als aus Punkten bestehend auffasst, sondern auch dann noch, wenn man C durch Bewegung einer Tangente sich bilden lässt. Alles zusammengefasst ergibt sich der Satz:

Sucht man zu jedem Punkte p einer Curve C die Polare P in Bezug auf einen festen Kreis M, so bilden alle Geraden P zusammengenommen die Tangenten einer neuen Curve C_1. Der Tangente G im Punkte p von C entspricht der Berührungspunkt s der Tangente P von C_1. Die Curve C_1 heisst die Polarfigur der Curve C; umgekehrt ist auch C die Polarfigur von C_1. Sind zwei Curven zu einander polar, wenn man die erste als aus Punkten, die zweite als aus Tangenten bestehend auffasst, so sind sie auch polar, wenn man die erste als Tangentengebilde, die zweite als Punktgebilde betrachtet.

Sei M der Fundamentalkreis, in Bezug auf welchen polarisirt wird, M sein Mittelpunkt und R sein Radius, ferner Mp der Ra-

Fig. 100.

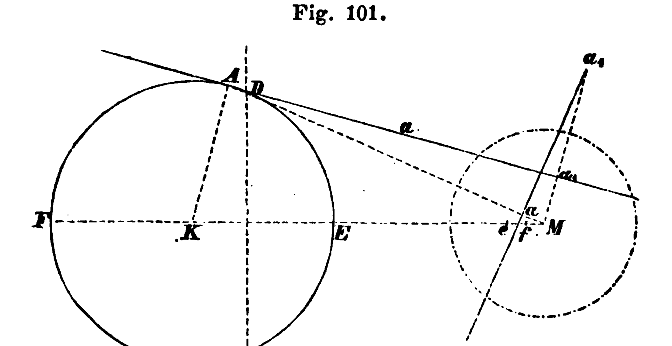


dius eines ihm conzentrischen Kreises K, so ist die Polarfigur desselben ein zu M und K conzentrischer Kreis K_1. Um dessen Radius Ms zu finden, bedenkt man, dass der durch p gehende Durchmesser des Kreises M vier harmonische Punkte enthält, von denen p und s zwei zugeordnete sind, während die beiden an-

deren q_1 und q_2 auf dem Kreise M liegen; deren Mitte ist demnach M, und nach § 5 findet die Relation statt: $Mq_1^2 = Mq_2^2 = R^2 = Mp . Ms$, also $Ms = \frac{R^2}{Mp}$, wodurch der Kreis K_1 vollständig bestimmt ist. Wenn $Mp = R$ ist, so fallen natürlich K_1 und K_2 mit dem Kreise K zusammen.

Ist K nicht conzentrisch mit M, so ist die Polarfigur von K in Bezug auf M nicht ein Kreis, sondern eine andere Curve, deren Gestalt gefunden werden soll.

Fig. 101.



Es seien A, a ein beliebiger Punkt und seine zugehörige Tangente im Kreise K, und A_1, a_1 seien resp. die Polare und der Pol derselben. Der Radius des Kreises M ist R, demnach hat man: $M\alpha . MA = R^2$; $M\alpha_1 . Ma_1 = R^2$. Da der Ort von A der Kreis K ist, so ist der Ort von α ein bestimmter Kreis K_1, der mit K den Punkt M zum Aehnlichkeitspunkte hat, und zwar im Falle unserer Figur zum äussern Aehnlichkeitspunkte. Zum Beweise sucht man die Punkte e und f, welche zu E und F [den Endpunkten des Durchmessers MK im Kreise K] in demselben Verhältniss stehn, wie α zu A und zeigt, dass $\sphericalangle\, e\alpha f$ ein Rechter ist. Man hat in der That, da $R^2 = MA . M\alpha = ME . Me = MF . Mf$ ist, $MA : ME = Me : M\alpha$ und $MA : MF = Mf : M\alpha$. Es sind also sowohl die Dreiecke MAE und $M\alpha e$, als auch die Dreiecke MAF und $M\alpha f$ ähnlich. Man hat aus diesen Aehnlichkeiten $\sphericalangle\, AEM = e\alpha M$ und $\sphericalangle\, AFM = f\alpha M$ und da $\sphericalangle\, MFA - MEA = 90^0$, so ist auch $\sphericalangle\, M\alpha f - M\alpha e = 90^0$, also der Ort von α wirklich ein Kreis.

Nun ist A_1 zu dem Strahle $M\alpha$ senkrecht, daher ist der Ort von A_1 eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die Fusspunkte sämmtlicher Perpendikel, die von einem Punkte M auf ihre Tangenten gefällt werden können, in einem Kreise liegen, also ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ [im Falle unserer Figur eine Hyperbel], welcher M zum Brennpunkt und den Durchmesser des Kreises K_1 zur grossen Axe, sowie dessen Mittelpunkt zum Mittelpunkte hat; es liegt somit die Hauptaxe des Kegelschnitts in der Geraden MK. Man hat also die nachfolgenden Sätze:

Die irgend einem gegebenen Kreise K entsprechende Polarfigur $\mathfrak{K}$ in Bezug auf einen Kreis M ist irgend ein Kegelschnitt. Einem Punkte A und der zugehörigen Tangente a bei K entsprechen eine Tangente A_1 und deren Berührungspunkt a_1 bei $\mathfrak{K}$; die Hauptaxe von $\mathfrak{K}$ fällt auf die Axe der Kreise MK; M ist Brennpunkt von $\mathfrak{K}$.

Schliesst der Kreis K den Mittelpunkt M nicht ein, so sind aus demselben zwei Tangenten c, d an K vorhanden; daher hat $\mathfrak{K}$ zwei Tangenten C_1, D_1, deren Berührungspunkte $c_1 d_1$ unendlich entfernt sind, also zwei Asymptoten, und es ist demnach $\mathfrak{K}$ eine Hyperbel.

Geht der Kreis K durch den Mittelpunkt M, so wird $\mathfrak{K}$ eine Parabel, der Ort von α, d. h. der Kreis K_1 geht in eine Gerade über, nämlich in die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{K}$.

Schliesst K den Mittelpunkt M ein, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ eine Ellipse; alsdann schliesst auch der Kreis K_1 den Punkt M ein, welcher äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise K, K_1 bleibt. Es ist ersichtlich, dass $\mathfrak{K}$ keine unendlich entfernten Punkte enthalten kann.

Durch Umkehrung folgt: Irgend ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ der Ebene geht durch Polarisation in Bezug auf einen beliebigen der Kreise mit dem Mittelpunkte M, wo M ein Brennpunkt von $\mathfrak{K}$ ist, in einen Kreis über. Der vollständige Beweis dieses Satzes wird geführt, indem man den Kreis zu Hülfe nimmt, welcher über der grossen Axe von $\mathfrak{K}$ als Durchmesser beschrieben werden kann, und welcher der Ort der Fusspunkte aller Perpendikel ist, die von M auf die sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts gefällt werden.

Wir können von den bis jetzt erhaltenen Resultaten sofort Anwendung machen auf die Construction eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, von welchem man einen Brennpunkt und drei aus Punkten oder

Tangenten bestehende Elemente kennt. Es sind hiebei vier verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich ausser dem Brennpunkt gegeben sind: 1) drei Tangenten, 2) zwei Tangenten und ein Punkt, 3) eine Tangente und zwei Punkte und 4) drei Punkte. Polarisirt man den gesuchten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in Bezug auf einen Kreis M, welcher den gegebenen Brennpunkt von $\mathfrak{K}$ zum Mittelpunkt hat, so wird er zu einem Kreise K, seine Punkte zu Tangenten von K und seine Tangenten zu Punkten dieses Kreises. Die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu finden, welcher einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat, und welcher drei gegebene Gerade berührt, lässt sich also zurückführen auf die andere: Einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu legen. Ebenso ist die Aufgabe, einen Kegelschnitt von gegebenem Brennpunkt durch drei bestimmte Punkte zu legen, abhängig von der andern, einen Kreis zu bestimmen, welcher drei Gerade berührt. Diese lässt vier Auflösungen zu, also auch die ursprüngliche, wie bereits in vorigen Paragraphen bewiesen worden ist.

Polarisirt man eine Parabel in Bezug auf einen beliebigen Kreis M, der ihren Brennpunkt B zum Mittelpunkt hat, so wird sie zu einem Kreise K, welcher durch B geht und dessen Mittelpunkt k heissen soll; eine Tangente G der Parabel wird zu einem Punkte C des Kreises, und zwar steht die Gerade CB senkrecht auf G. Wenn ferner zwei Tangenten der Parabel G und G_1 einen bestimmten Winkel α mit einander bilden, so werden die Geraden BC und BC_1, welche B mit den diesen Tangenten entsprechenden Punkten C und C_1 verbinden, ebenfalls den Winkel α oder dessen Nebenwinkel einschliessen. Dem Durchschnittspunkt der Parabeltangenten entspricht nun die Gerade CC_1, welche von k einen Abstand hat, der durch den Winkel α vollkommen bestimmt ist. Bewegen sich demnach zwei Parabeltangenten so, dass der von ihnen gebildete Winkel constant bleibt, so bewegt sich die Polare ihres Durchschnittspunktes derart, dass sie einen constanten Abstand von k behält, d. h. als Tangente eines mit K concentrischen Kreises. Der Durchschnittspunkt selbst durchläuft die Polarfigur des so bestimmten Kreises in Bezug auf den Kreis M, nämlich einen Kegelschnitt, der B zum Brennpunkt hat und leicht als eine Hyperbel erkannt wird, was bereits in § 18 bewiesen worden ist.

Das einem beliebigen Kreis K eingeschriebene Sechseck hat

nach dem Pascal'schen Satze [§ 4] die Eigenschaft, dass die drei Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten in einer Geraden liegen; bei einem dem Kreise umschriebenen Sechseck schneiden sich zufolge des Satzes von Brianchon [§ 6] die drei Hauptdiagonalen in einem und demselben Punkte.

Diese beiden Sätze lassen sich in folgender Weise auf die Kegelschnitte übertragen: Es sei ein Sechseck gegeben, welches einem beliebigen Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ eingeschrieben ist. Polarisirt man nun $\mathfrak{K}$ so, dass er zu einem Kreise K wird, d. h. polarisirt man in Bezug auf einen Kreis, welcher einen der Brennpunkte von $\mathfrak{K}$ zum Mittelpunkt hat, so werden die Ecken des Sechsecks zu sechs Tangenten des Kreises K, also zu einem diesem Kreise umschriebenen Sechseck. Die gegenüberliegenden Seiten des $\mathfrak{K}$ eingeschriebenen Sechsecks werden zu gegenüberliegenden Ecken des K umschriebenen Sechsecks, und die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des ersten Sechsecks zu Hauptdiagonalen des zweiten. Da diese sich in einem und demselben Punkte schneiden, so müssen jene, welche die Pole der Hauptdiagonalen sind, in einer Geraden liegen. Damit ist die folgende Fassung des Pascal'schen Satzes bewiesen:

Werden irgend sechs Punkte eines beliebigen Kegelschnitts in einer willkürlichen Reihenfolge durch 1 2 3 4 5 6 bezeichnet, und die nachfolgenden Paare der Seiten des von ihnen gebildeten Sechsecks: 1 2 und 4 5, 2 3 und 5 6, 3 4 und 6 1 gegenüberliegende Seiten genannt, so liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden.

In ähnlicher Weise ergibt sich eine allgemeinere Fassung des Satzes von Brianchon:

Sechs Tangenten eines Kegelschnittes, welche wir in irgend einer Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnen, heissen ein dem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck. Die successiven Schnittpunkte von 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 1 nennen wir die Ecken desselben, und zwar werden 1 2 und 4 5, 2 3 und 5 6, 3 4 und 6 1 als gegenüberliegende definirt. Die Hauptdiagonalen eines solchen Sechsecks [d. h. die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken] schneiden sich in einem und demselben Punkte.

§ 24. Der gerade Kegel.

Eine grosse Reihe der bis jetzt aufgefundenen Sätze über Ellipse, Hyperbel und Parabel und manche neue Eigenschaften dieser Curven lassen sich ableiten, indem man dieselben als Schnitte einer Ebene mit einem Kreiskegel auffasst. Diese Betrachtungsweise ist in frühern Zeiten der Ausgangspunkt zur Untersuchung der genannten Curven gewesen, und hat ihrer Bezeichnung Kegelschnitte den Ursprung gegeben. Unsere in dieser Richtung gehende Betrachtung leiten wir durch einige elementare Sätze ein, die sich auf das Dreieck und die vier ihm eingeschriebenen Kreise beziehen.

Ist einem Dreieck ein Kreis eingeschrieben, so lassen sich die Abschnitte, in welche die Seiten durch die Berührungspunkte getheilt werden, durch die Seiten ausdrücken. Wiewohl jede Seite durch die Berührungspunkte der vier dem Dreieck eingeschriebenen Kreise in acht, und also alle drei Seiten in vier und zwanzig Abschnitte getheilt werden, so sind diese doch nur von viererlei Grösse, nämlich es entsprechen ihnen, wenn a, b, c die Seiten sind, nur die vier Ausdrücke $\frac{a+b+c}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$, $\frac{-a+b+c}{2}$. Denn es sei DKC ein beliebiges Dreieck, und der ihm wirklich eingeschriebene d. h. der von ihm umschlossene Kreis M berühre die Seiten a, b, c bezüglich in G, E, A, so ist $DG = DA$, $KG = KE$, $CE = CA$; daher ist $DG = DA = \frac{a-b+c}{2}$, $KG = KE = \frac{a+b-c}{2}$, $CE = CA = \frac{-a+b+c}{2}$. Ist ferner N einer der drei äussern Kreise, so ist: $DB = DH = \frac{a-b+c}{2}$, $KH = KF = \frac{a+b+c}{2}$, $CF = CB = \frac{-a+b+c}{2}$. Man sieht hieraus, dass jeder äussere Kreis diejenige Seite $DC = c$, über welcher er liegt, in eben solche Abschnitte theilt, wie der innere, $CA = DB$ und $CB = DA$, nur haben dieselben verwechselte Lage, und dass jener in den zwei andern Seiten Abschnitte hervorbringt, KH und KF, die dem halben Umfange des Dreiecks gleich sind.

Da nach dem Vorstehenden $KD - KC = DG - CE = DA - EA = AB$, so folgt der nachstehende Satz: Ist die Grundlinie DC eines Dreiecks DKC fest [ihrer Grösse und Lage nach] und ebenso der Punkt A, in welchem sie von dem eingeschrie-

benen Kreise M berührt wird, so ist auch ihr Berührungspunkt B mit dem über ihr liegenden eingeschriebenen Kreise N fest. Dagegen ist der Ort der Spitze K des Dreiecks eine bestimmte Hyperbel, welche die Endpunkte der Grundlinie zu Brennpunkten, und die genannten Berührungspunkte zu Hauptscheiteln hat; und umgekehrt:

Hat man irgend drei feste Punkte D, A und C in einer Geraden, denkt sich dann die Schaar Kreise, welche die Gerade in dem innern oder mittlern Punkte A berühren, und legt aus den zwei übrigen, B und C, an jeden Kreis Tangenten, so ist der Ort des Durchschnitts K dieser Tangentenpaare eine bestimmte Hyperbel, welche die äussern Punkte zu Brennpunkten und den mittlern zu einem Scheitel der Hauptaxe hat; zugleich berühren die Tangentenpaare die einzelnen Kreise N einer andern Schaar, welche den andern Hauptscheitel B zum gemeinschaftlichen Berührungspunkt mit der Axe hat. Ferner:

Beschreibt man in alle Dreiecke, wovon jedes das Stück CD der Axe einer Hyperbel zwischen den Brennpunkten zur Grundlinie und irgend ein Paar zusammengehörige Leitstrahlen CK und DK zu Schenkeln hat, innerhalb und über der Grundlinie Kreise M und N, so berührt jedes Kreispaar die Grundlinie [oder die Axe der Hyperbel in denselben zwei festen Punkten A und B, nämlich in den Scheiteln A und B der Hyperbel].

Liegt der Berührungspunkt des Kreises mit der Grundlinie des Dreiecks in der Verlängerung der Grundlinie, d. h. ist er von den drei festen Punkten einer der beiden äussern, wie z. B. in Ansehung des Dreiecks CK_1L, wo CL die feste Grundlinie und E und F die festen Berührungspunkte sind, so folgen analoge Sätze für die Ellipse wie vorhin für die Hyperbel, nämlich der Ort von K_1 ist eine Ellipse, welche die festen Endpunkte der Grundlinie, C und L zu Brennpunkten und die festen Berührungspunkte E und F zu Hauptscheiteln hat, u. s. w.

Irgend zwei ausser einander liegende Kreise M, N in einer Ebene haben vier gemeinschaftliche Tangenten, zwei äussere EF und GH und zwei innere AB und XY; jene schneiden sich in K, diese in K_1, und jene schneiden sich mit diesen in den vier Punkten C, L, D, J [welche beiläufig bemerkt, allemal mit den Mittelpunkten M und N in einem dritten Kreise liegen]. Da nun $CA = CE$ und $DB = DH = LF$ und ferner $CB = CL$, so ist:

$AB = XY = CL = DJ$ und $CD = JL = EF = GH$, d. h.: Die Strecken, welche auf dem einen Tangentenpaare durch die

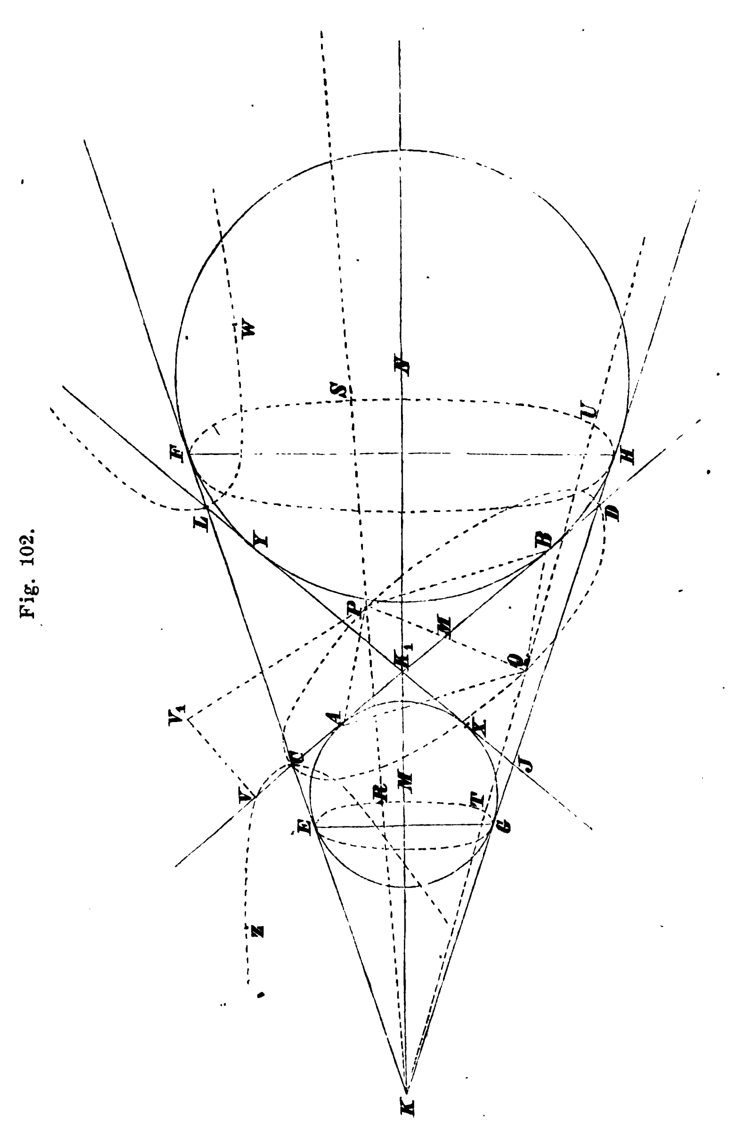


Fig. 102.

Berührungspunkte begrenzt werden, sind den Stücken gleich, welche dieses Paar von dem andern Paar abschneidet.

Wird das ganze System um die Axe KMK_1N herumgedreht, so entsteht Folgendes:

1) Die Kreise MN beschreiben zwei Kugeln M, N.

2) Die beiden Tangentenpaare erzeugen zwei gerade Kegel K, K_1, welche die gemeinschaftlichen umschriebenen Kegel jener Kugeln (1) sind, K der äussere und K_1 der innere; bei jenem liegen beide Kugeln in dem nämlichen Theil oder der nämlichen Hälfte des Kegels, bei diesen in verschiedenen Hälften.

3) Jeder Kegel berührt jede Kugel in einem Kreise, z. B. der Kegel K berührt sie in den Kreisen ERG, FSH, welche von den Berührungspunkten E oder G, F oder H beschrieben werden. Die Kanten des Kegels bis an den Berührungskreis haben gleiche Länge, ebenso die Stücke derselben zwischen beiden Berührungskreisen, d. h. $EF = RS = GH =$ constant.

4) Jede Ebene, welche einen der beiden Kegel berührt, berührt zugleich beide Kugeln, und auch umgekehrt. Eine solche Berührungsebene wird erhalten oder bestimmt, wenn man z. B. an einen der genannten Kreise, etwa an ERG in irgend einem Punkte R die Tangente legt, und durch sie und den durch denselben Punkt gehenden Strahl [Kante] KR des zugehörigen Kegels K die Ebene sich denkt. Es ist klar, dass die Berührungspunkte R, S beider Kugeln in dem nämlichen Strahle liegen, und dass die Ebene durch diesen und durch die Axe MN allemal auf der Berührungsebene senkrecht steht, so dass also z. B. die Ebene $CPDQC$, welche in der Geraden CD auf der Grundebene [d. h. der Ebene der ursprünglichen Figur, der Zeichnungsfläche] senkrecht steht, eine der genannten berührenden Ebenen ist, die den Kegel K_1 längs des Strahls CD, und die Kugeln M, N in den Punkten A, B berührt. So verhält es sich aber offenbar mit jeder berührenden Ebene, weil jede durch die Axe gehende Ebene als jene Grundebene angesehen werden kann, indem sie durch Drehung in die Lage derselben gelangt. Es fällt ferner in die Augen, dass jede Ebene, welche den einen Kegel berührt, den andern schneidet, wie z. B. die letztgenannte, den innern Kegel K_1 berührende Ebene den äussern K in der Linie $CPDQC$ schneidet, und dass ferner die gesammten gemeinschaftlichen Tangentenebenen der zwei Kugeln zugleich die gesammten Tangentenebenen der zwei Kegel, jeden einzeln betrachtet, sind; diess gilt natürlich auch umgekehrt.

5) Der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche einem ge-

raden Kegel eingeschrieben sind, d. h., welche den Kegel in Kreisen berühren, ist die Axe [Hauptaxe] des Kegels, und zwar so, dass umgekehrt jeder Punkt der Axe der Mittelpunkt einer solchen Kugel ist. Und ferner: Wird der Kegel von irgend einer Ebene E geschnitten, die jedoch weder durch seine Axe, noch durch seinen Mittelpunkt [K oder K_1] geht, so gibt es allemal irgend zwei bestimmte eingeschriebene Kugeln, welche jene Ebene berühren [es mag E beide oder nur die eine Hälfte des Kegels schneiden]. Man denke sich irgend eine den Kegel berührende Ebene E_1 und ferner die zwei Ebenen e und e_1, welche die von E und E_1 gebildeten Winkel hälften, so werden dieselben die Axe in den Mittelpunkten der gesuchten Kugeln treffen.

Um nun den Schnitt, welchen irgend eine Ebene mit einem geraden Kegel bildet, genauer zu erforschen, betrachten wir zunächst den Schnitt $CPDQC$, welcher der gleichbenannten Ebene und dem Kegel K angehört. Zieht man aus irgend einem Punkte P des Schnittes nach den Berührungspunkten A, B Gerade PA, PB, so berühren sie daselbst die Kugeln M, N; daher ist $PA = PR$ und $PB = PS$ [als Tangenten aus einem Punkte an eine Kugel M oder N] und folglich $PA + PB = PR + PS = RS =$ constant; d. h.: Jeder Punkt P des Schnittes hat von den zwei Punkten A und B, in welchen seine Ebene die Kugeln M und N berührt, eine unveränderliche Summe der Entfernungen, folglich ist dieser Schnitt eine Ellipse, welche jene Punkte zu Brennpunkten hat, und deren Hauptaxe dieser constanten Summe gleich ist; nun ist CD offenbar die Hauptaxe der Ellipse, daher ist $RS = CD$.

Entsprechender Weise folgt, dass jeder Punkt W des Schnittes, welcher zwischen einer Ebene $WLCZ$ und dem Kegel K_1 stattfindet, von den zwei Punkten F, E, in welchen die Ebene von den Kugeln N, M berührt wird, einen constanten Unterschied der Entfernungen hat, und dass folglich der Schnitt eine Hyperbel ist, welche jene Punkte zu Brennpunkten hat, und deren Hauptaxe CL gleich diesem Unterschiede ist, also $LC = AB = XY$.

Es ist leicht zu zeigen, dass nun umgekehrt, wenn blos der gerade Kegel [K oder K_1] und eine beliebige, ihn schneidende Ebene CPD oder WLC gegeben sind, aber die sie berührenden Kugeln M, N nicht, diese doch immer vorhanden und nach 3) zu finden sind, worauf die Beschaffenheit des Schnittes sich sofort

ergibt. Er ist nämlich eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem seine Ebene nur die eine oder beide Hälften des Kegels schneidet.

Es bleibt aber noch der besondere Fall zu untersuchen übrig, wo die schneidende Ebene mit irgend einer den Kegel berührenden Ebene parallel ist. In diesem Falle kann sie, wie die Anschauung unmittelbar zeigt, nur die eine Hälfte des Kegels schneiden, und zwar alle Kanten bis auf die eine, in welcher jene Ebene berührt. Auch entsteht dieser Fall dadurch, dass sich die eine Kugel N in's Unendliche entfernt. Dabei ist nun zu beweisen, dass der Schnitt eine Parabel ist. Diess kann unter andern dadurch geschehen, dass gezeigt wird, der Durchschnitt V der Kreisebene ERG und der Parabelebene CPD_∞ sei die Leitlinie der Parabel, denn für diesen Fall ist $CA = CE = CV$ und die Gerade V steht senkrecht auf der Axe CD. — Auch bei der Ellipse und der Hyperbel gehen die Ebenen der Berührungskreise [ERG etc.] durch die Leitlinie. Der Beweis kann für alle drei Kegelschnitte wie folgt geführt werden [wobei die von uns gegebene Figur noch zu vervollständigen ist]: *a*) Bei der Parabel lege man durch den Parallelstrahl KG der Schnittebene CD, wo D nur im Unendlichen liegt, Ebenen, so wird immer $PV_1 \parallel VC \parallel KG$ und GRV_1 eine Gerade sein [wo V_1 in V liegt], daher Dreieck $KGR \sim PRV_1$, und da stets $KG = KR$ auch $PR = PV_1 = PA$, folglich der Schnitt eine Parabel und V die Leitlinie. *b*) Für die Ellipse CDP ziehe man durch K eine Gerade KX parallel der grossen Axe CD; X sei der Punkt, in welchem der Strahl KH von der Kreisebene ERG getroffen wird, so ist wieder $PV_1 \parallel CD \parallel KX$ und Dreieck $KXR \sim PV_1R$; weil nun $KX : KR = PV_1 : PR$ [$= PA$] $=$ constant, so ist VV_1 die Leitlinie der Ellipse. Für die Hyperbel wird der Beweis in durchaus gleicher Weise geführt.

Alles zusammengefasst ergibt sich also: Der gegenseitige Durchschnitt eines geraden Kegels K oder K_1 und irgend einer Ebene E ist, wenn diese nicht durch den Mittelpunkt des Kegels geht, eine der drei Curven, Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und zwar die eine oder andere, je nachdem die schneidende Ebene E nur die eine Hälfte des Kegels oder alle Kanten desselben, oder beide Hälften mit Ausnahme zweier Kanten, oder nur die eine Hälfte desselben und von dieser alle Kanten bis auf eine

trifft. Aus diesem Grunde heissen die drei Curven Kegelschnitte. — Die Axe KM des Kegels trifft die Hauptaxe des Kegelschnittes, so dass beide Axen in einer Ebene E_1 liegen, und diese Ebene E_1 steht auf der schneidenden Ebene senkrecht. Es folgt daraus, dass das Perpendikel aus K auf E die Hauptaxe des Schnittes trifft. Umgekehrt: Steht irgend ein gerader Kegel über einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, so schneidet sich die Axe des Kegels und die Hauptaxe des Kegelschnitts; die beiden liegen stets in einer Ebene, welche senkrecht zur Ebene des Kegelschnittes steht.

Es ergeben sich nun folgende weitere Eigenschaften der Kegelschnitte: In der Ellipse CPD ziehe man den Durchmesser PM_1Q, so wie den Strahl QA, so ist $QA = PB = QT$ [QA und QP sind Tangenten an M] $= PS$, und ferner ist $KR = KT$, daher ist $KP + KQ = KT + (TQ + KP) = KT + KS =$ constant; also namentlich auch $KE + KF = KC + KD$, d. h.: der von einer Ellipse begrenzte gerade Kegel hat die Eigenschaft, dass die Summe je zweier Kanten KP und KQ, welche nach den Endpunkten irgend eines Durchmessers PQ der Ellipse gehen, constant ist, also z. B. stets der Summe der Kanten KC, KD, welche nach den Hauptscheiteln der Ellipse gehen, gleich ist, oder auch der Summe zweier Kanten gleich, welche bis zum Berührungspunkt der einen und der andern Kugel genommen werden.

Eine analoge Eigenschaft findet man für die Hyperbel, nämlich: Steht ein gerader Kegel über einer Hyperbel, so ist die Differenz zwischen je zwei Kanten desselben, welche nach den Endpunkten eines Durchmessers der Hyperbel gehen, constant, also gleich der Differenz der beiden Kanten, welche die Hauptscheitel der Hyperbel treffen, oder auch gleich dem Unterschiede zweier Kanten, die von den Berührungspunkten der einen und andern Kugel begränzt werden, d. h. $= K_1Y - K_1X = K_1B - K_1A$.

Wird die Ellipse $CPDQ$ als der Grösse und Lage nach unveränderlich, oder als fest angenommen, so kann nach dem Orte der Mittelpunkte (Scheitel) aller durch dieselbe gehenden geraden Kegel K gefragt werden; Aehnliches in Rücksicht der Hyperbel. Die Beantwortung dieser Frage folgt aus dem Bisherigen sehr leicht. Zunächst weiss man, dass der Mittelpunkt K oder K_1 des Kegels, sowie dessen Axe KMK_1 in einer festen Ebene CDK

liegen müssen, welche längs der Hauptaxe des gegebenen Kegelschnitts auf dessen Ebene senkrecht steht. Jene Ebene schneidet aber im Falle der Ellipse den begränzten Theil dieses Kegels, wie dieser auch liegen mag, in einem Dreieck *CDK*, dessen Grundlinie *CD* als Hauptaxe der Ellipse fest ist, und die jedesmaligen zwei Kugeln *M* und *N* schneidet sie in zwei Kreisen *M*, *N*, welche dem Dreieck eingeschrieben sind; die Berührungspunkte dieser Kreise mit der Grundlinie sind die Brennpunkte *A* und *B* der Ellipse. Daraus folgt also, dass der Ort von *K* eine Hyperbel ist, welche die Endpunkte *C*, *D* der Grundlinie zu Brennpunkten und die festen Berührungspunkte, d. h. die Brennpunkte der Ellipse zu Hauptscheiteln hat. Aehnlicherweise folgt, wenn man die Hyperbel zur festen gemeinschaftlichen Basis der geraden Kegel K_1 annimmt, dass dann der Ort der Mittelpunkte der letztern eine Ellipse sei, welche die Hauptscheitel der Hyperbel zu Brennpunkten und deren Brennpunkte zu Scheiteln hat. Daher sind zwei solche zusammengehörige Kegelschnitte, eine Ellipse und eine Hyperbel, zugleich reziprok, d. h. jeder ist der Ort der Mittelpunkte aller gerader Kegel, welche durch den andern gehen. Geht einer dieser Kegelschnitte durch unendliche Erweiterung in eine Parabel über, so thut der andere zugleich dasselbe, und dann sind die zwei Parabeln einander in gleichem Sinne zugeordnet; auch sind sie einander gleich. [Die Axe des Kegels ist stets Tangente des Kegelschnitts, welcher der Ort des Kegelmittelpunkts ist, und also nothwendig Tangente in dem jedesmaligen zugehörigen Mittelpunkt.] Man hat also den Satz: Der Ort der Mittelpunkte aller geraden Kegel, welche durch irgend einen und denselben Kegelschnitt gehen, ist ein bestimmter zweiter Kegelschnitt, welcher mit jenem ersten in solcher Beziehung steht, dass dieser umgekehrt der Ort der Mittelpunkte aller geraden Kegel ist, die durch den zweiten Schnitt gehen; und ferner stehen die zwei Kegelschnitte zu einander in der Beziehung, dass ihre Ebenen sich rechtwinklig schneiden, dass die Brennpunkte eines jeden mit den Hauptscheiteln des andern zusammenfallen [also ihre Hauptaxen im Durchschnitte beider Ebenen liegen], und dass daher nur zwei verschiedene Hauptfälle möglich sind, nämlich, dass entweder α) der eine Kegelschnitt eine Ellipse und der andere eine Hyperbel ist, oder β) beide Kegelschnitte einander gleiche Parabeln sind.

Betrachtet man den geraden oder Kreiscylinder als speziellen Fall des geraden Kegels, so folgt, dass sein Mittelpunkt im Unendlichen liegt. Es ergibt sich also: durch irgend eine feste Ellipse gehen zwei, aber nur zwei gerade Cylinder; durch eine Hyperbel keiner, und durch eine Parabel stets einer, der aber flach wird, d. h. in eine Ebene, die Ebene der Parabel übergeht.

Die Brennpunkte der Ellipse und der Hyperbel haben auch die Eigenschaft, dass wenn man aus einem derselben nach den Endpunkten irgend eines [reellen] Durchmessers Strahlen zieht, wie etwa AP, AQ bei der Ellipse, dann für die Ellipse die Summe und für die Hyperbel die Differenz dieser Strahlen constant ist. In dieser Hinsicht hat demnach der Mittelpunkt jedes geraden Kegels K oder K_1, welcher über einer Ellipse oder einer Hyperbel steht, dieselbe Eigenschaft, wie jeder ihrer Brennpunkte für sich betrachtet, so dass man den genannten Mittelpunkten die Benennung „Brennpunkte ausser der Ebene“ oder „räumliche Brennpunkte“ des Kegelschnitts geben könnte.

Noch entschiedener spricht sich diese übereinstimmende Eigenschaft aus, wenn man zwei von jenen Kegelmittelpunkten gemeinsam betrachtet. Man denke sich z. B. über der Ellipse $CPDQ$ irgend zwei gerade Kegel K und K_2, deren Mittelpunkte in demselben Zweige der Ortshyperbel liegen sollen, und zwar in demjenigen, dessen Scheitel A ist, so ist, wenn man sich die in A berührenden, den Kegeln eingeschriebenen Kugeln M, M_2 denkt, und bemerkt, dass für jede Kante, wie etwa KP, $PA = PR = PR_1$ und KR, K_1R_1 constant sind: $KP - PA =$ const., und $K_2P - PA =$ const., mithin auch $KP - K_2P =$ const. $= KR - K_2R_2$. Ist ferner K_3 ein gerader Kegel über der nämlichen Ellipse, aber liegt sein Mittelpunkt im andern Zweige der Ortshyperbel, also dem Brennpunkte B näher, als dem Brennpunkte A, so hat man $K_3P + PA =$ const. und mithin: $KP + K_3P =$ const. $= KR + K_3R_3$. Das heisst:

Jede feste Ellipse hat unzählig viele Paare von Brennpunkten, in dem Sinne nämlich, dass, wenn man aus einem solchen Punktenpaare nach einem Punkte ihres Umfanges Strahlen zieht, alsdann entweder α) die Summe oder β) der Unterschied derselben constant ist, und zwar liegen alle diese Brennpunkte in einer bestimmten, der Ellipse auf eigenthümliche Weise zugeordneten Hyperbel, d. h. je zwei Punkte in dieser sind ein Paar Brenn-

punkte jener, und es kommt jedem Paar Brennpunkte die Eigenschaft α) oder β) zu, je nachdem sie in verschiedenen oder in dem nämlichen Zweige der Hyperbel liegen.

Aehnlicherweise folgt für die Hyperbel: Jede in fester Lage betrachtete Hyperbel hat unzählige Paare von Brennpunkten in dem Sinne, dass die Differenz ihrer Abstände von allen Punkten ihres Umfangs constant ist; der Ort aller solcher Brennpunkte ist die der Hyperbel zugeordnete Ellipse, d. h. je zwei Punkte in dieser sind ein Paar Brennpunkte von jener.

Schliesslich hat man für die Parabel: Jede feste Parabel hat unzählige Paare von Brennpunkten in dem Sinne, dass die Differenz der Abstände jedes solchen Punktenpaares von den einzelnen Punkten der Parabel constant ist; der Ort aller dieser Brennpunkte ist die der festen Parabel zugeordnete Parabel, d. h. jede zwei Punkte in dieser sind ein solches Paar für jene, und zugleich auch umgekehrt: die Punkte der erstern sind in demselben Sinne die Brennpunkte der zweiten Parabel.

Aus den vorigen Sätzen folgen unmittelbar nachstehende:

Stehen zwei gerade Kegel K, K_2, über dem nämlichen Kegelschnitte, und man trägt die Kanten PK_2 des einen auf den Kanten PK des andern ab, entweder alle nach dem Mittelpunkte K hin, wo sie auch über diesen hinausreichen können, oder alle auf der Verlängerung über den Kegelschnitt hinaus, so sind in jedem Falle die Endpunkte derselben gleichweit von dem Mittelpunkte K entfernt, d. h. sie liegen in einem Kreise [ERG oder FSH, in welchem die Kegelfläche K von einer Kugel M oder N berührt wird.

Man hat ferner den nahezu gleichlautenden Satz: Steht ein gerader Kegel K über einem Kegelschnitt, und man trägt auf jeder Kante PK desselben die ihr entsprechenden Leitstrahlen PA, PB des Schnittes ab, und zwar den einen Strahl PA, welcher nach dem dem Mittelpunkte K des Kegels näher liegenden Brennpunkt führt, nach diesem Mittelpunkte hin, den andern aber nach entgegengesetzter Richtung, so liegen die Endpunkte der abgetragenen Strahlen in dem einen und andern Falle in einem Kreise ERG, FSH, in welchem der Kegel von einer Kugel M, N berührt wird; und umgekehrt: Trägt man die Kanten PK des Kegels auf den entsprechenden Leitstrahlen PA, PB des Schnittes ab, und zwar für den dem Scheitel K nähern Brennpunkt A

nach diesem hin, für den andern B dagegen auf der Verlängerung des Strahls, so liegen die Endpunkte derselben beziehlich in einem Kreise A oder B. Schliesslich: Beschreibt man um die Brennpunkte A und B eines Kegelschnitts zwei Kreise unter der Bedingung, dass die Summe ihrer Radien $AA_1 + BB_1 = CD$ = Hauptaxe des Schnittes, und trägt die Differenz der Radien und Leitstrahlen PA, PB also PA_1 und PB_1 auf der zugehörigen Kante PK des geraden Kegels ab, so liegen die Endpunkte in einem und demselben Kreise.

Siebentes Kapitel.

Der Kegelschnitt als Projection des Kreises.

§ 25. Kreis und Kegelschnitt im geraden Kegel.

Um die in § 7 abgeleiteten harmonischen Eigenschaften des Kreises in bequemer Weise auf die Kegelschnitte überzutragen, müssen wir neben harmonischen Punkten und harmonischen Strahlen noch harmonische Ebenen in unsere Betrachtung einführen. Wir nennen vier harmonische Ebenen vier Ebenen, welche von einem Punkte aus durch vier mit diesem Punkte nicht in einer Ebene liegende harmonische Strahlen gelegt werden können. Vier harmonische Ebenen werden auch erzeugt durch eine Gerade und vier harmonische Punkte, welche mit der Geraden nicht in derselben Ebene liegen. Vier harmonische Ebenen werden von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten, von jeder Ebene in vier harmonischen Strahlen geschnitten; es fällt also nicht schwer, zu drei gegebenen Ebenen bei bestimmter Zuordnung die vierte harmonische zu construiren. Als spezielle Fälle seien hier erwähnt: 1) Zwei Ebenen und ihre beiden winkelhalbirenden Ebenen. 2) Vier parallele Ebenen, welche durch vier harmonische Punkte gelegt sind. [Man schliesst daraus, dass im Sinne der harmonischen Eigenschaften ein System paralleler Ebenen aufgefasst werden kann als ein System von Ebenen, welche durch dieselbe unendlich entfernte Gerade gehen.] 3) Drei parallele Ebenen, von denen die eine in der Mitte zwischen den beiden andern liegt, und irgend eine unendlich entfernte Ebene. [Um den Satz nicht umstossen zu müssen, dass zu drei Ebenen bei bestimmter Zuordnung stets nur eine vierte harmonische existirt, bedient man sich des Ausdrucks: die unendlich entfernte Ebene des Raumes, was heissen soll, dass in Ansehung harmonischer

Eigenschaften alle unendlich entfernten Punkte des Raumes so aufgefasst werden können, als lägen sie auf einer und derselben Ebene.]

Wählt man nun einen Kreis M in der Ebene E und einen durch M gehenden geraden Kegel mit der Spitze [oder dem Mittelpunkte] D, der ausserhalb der Ebene E liegt, so tritt Folgendes ein: Jedem Punkte der Ebene E entspricht im Allgemeinen ein geradliniger Strahl durch D, so dass jeder Punkt auf dem entsprechenden Strahle liegt, und jeder Strahl durch seinen entsprechenden Punkt geht; jedem Punkte des Kreises M entspricht ein Strahl des Kegels D, dem Mittelpunkte des Kreises die Axe des Kegels. Zu jeder Geraden in E gehört jetzt eine Ebene durch D und umgekehrt, namentlich entspricht der durch D parallel zu E gelegten Ebene die unendlich entfernte Gerade der Ebene E; zu einer Tangente des Kreises M gehört eine Tangentialebene des Kegels D. Vier harmonische Punkte in E bestimmen vier harmonische Strahlen in D und vier harmonische Strahlen in E ergeben vier harmonische Ebenen durch D.

Schneidet man den Kegel D durch eine Ebene E_1, welche weder durch D geht, noch der Ebene E parallel läuft, so erhält man als Ort der gemeinsamen Punkte von D und E_1 einen Kegelschnitt K, der durch den Kegel mit dem Kreise M in nachfolgende Beziehung tritt: Jedem Punkte von M entspricht derjenige Punkt von K, welcher mit ihm auf derselben Kante des Kegels D liegt, und ebenso schneidet eine Tangentialebene von D auf E und E_1 entsprechende Tangenten von M und K aus. Zu vier harmonischen Punkten in der Ebene des Kreises findet man zugehörige vier harmonische Punkte in der Ebene des Kegelschnittes K, zu vier harmonischen Strahlen in der erstgenannten Ebene vier harmonische Strahlen in der zweiten u. s. f.

Auf Grund dieser einfachen Betrachtungen lassen sich demnach eine Reihe von Sätzen, welche vom Kreise gelten, ohne jegliche Mühe auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen, indem man einfach bedenkt, dass irgend ein Kegelschnitt mit einem willkürlichen Kreise stets in die vorhin untersuchte Lage gebracht werden kann. Man construire nämlich über dem Kegelschnitt einen geraden Kegel, [was auf unendlich viele Arten möglich ist] und suche unter den zur Axe des Kegels senkrecht stehenden Ebenen diejenige aus, welche einen Kreis ergibt, der mit dem

Siebentes Kapitel.

Der Kegelschnitt als Projection des Kreises.

§ 25. Kreis und Kegelschnitt im geraden Kegel.

Um die in § 7 abgeleiteten harmonischen Eigenschaften de Kreises in bequemer Weise auf die Kegelschnitte überzutragei müssen wir neben harmonischen Punkten und harmonische Strahlen noch harmonische Ebenen in unsere Betrachtung ei führen. Wir nennen vier harmonische Ebenen vier Ebenen, welc von einem Punkte aus durch vier mit diesem Punkte nicht einer Ebene liegende harmonische Strahlen gelegt werden könn Vier harmonische Ebenen werden auch erzeugt durch eine Ger und vier harmonische Punkte, welche mit der Geraden nicht derselben Ebene liegen. Vier harmonische Ebenen werden jeder Geraden in vier harmonischen Punkten, von jeder Eb in vier harmonischen Strahlen geschnitten; es fällt also n schwer, zu drei gegebenen Ebenen bei bestimmter Zuordnung vierte harmonische zu construiren. Als spezielle Fälle seien erwähnt: 1) Zwei Ebenen und ihre beiden winkelhalbire Ebenen. 2) Vier parallele Ebenen, welche durch vier harn sche Punkte gelegt sind. [Man schliesst daraus, dass im S der harmonischen Eigenschaften ein System paralleler El aufgefasst werden kann als ein System von Ebenen, welche dieselbe unendlich entfernte Gerade gehen.] 3) Drei par Ebenen, von denen die eine in der Mitte zwischen den b andern liegt, und irgend eine unendlich entfernte Ebene. den Satz nicht umstossen zu müssen, dass zu drei Ebene bestimmter Zuordnung stets nur eine vierte harmonische e bedient man sich des Ausdrucks: die unendlich entfernte des Raumes, was heissen soll, dass in Ansehung harmo

Eigenschaften alle unendlich … aufgefasst werden können, als … Ebene.

Wählt man nun einen K… durch M gehenden geraden K… telpunkte D, der ausserhalb … des ein: Jedem Punkte der Ebe… ein geradliniger Strahl durch D … sprechenden Strahle liegt, und jeder … chenden Punkt geht; jedem Punkte … Strahl des Kegels D, dem Mit… Kegels. Zu jeder Geraden in E … D und umgekehrt, namentlich … E gelegten Ebene die unendlich … zu einer Tangente des Kreises … des Kegels D. Vier harmonische Punkte … harmonische Strahlen in D … ergeben vier harmonische Ebenen in D und vier harmonische …

Schneidet man den Kegel D durch … weder durch D geht, noch der Ebene E … man als Ort der gemeinsamen Punkte … schnitt K', der durch den Kegel mit … folgende Beziehung tritt: Jedem Punkte … jenige Punkt von K', welcher mit ihm auf … Kegels D liegt, und ebenso schneidet eine Tangente … D auf E und E' entsprechende Tangenten von … Zu vier harmonischen Punkten … man zugehörige vier harmonische Punkte in der Ebene … geschnittes K', zu vier harmonischen Punkte in der Ebene … ten Ebene vier harmonischen Strahlen in der …

Auf Grund dieser einfachen Betrachtungen … nach eine Reihe von Sätzen, welche … gehörige Mühe auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen, … dem man einfach bedenkt, dass … willkürlichen Kreise stets in die … werden kann. Man construire … einen geraden Kegel, … und suche unter den zur Axe … Ebenen diejenige aus, welche …

gegebenen Kreise gleichen Radius hat. Es ergeben sich dann aus den folgenden links stehenden Sätzen unmittelbar die auf der rechten Seite befindlichen.

Eine Gerade hat mit einem Kreise zwei, einen oder keinen Punkt gemein, je nachdem sie denselben schneidet, berührt oder nicht schneidet. Der Kreis ist desshalb eine Curve zweiten Grades.

Eine Gerade hat mit einem Kegelschnitte zwei, einen oder keinen Punkt gemein, je nachdem sie denselben schneidet, berührt oder nicht schneidet. Der Kegelschnitt ist desshalb eine Curve zweiten Grades.

Von einem Punkte aus lassen sich an einen Kreis zwei, eine oder keine Tangente legen, je nachdem er ausser dem Kreise, auf demselben, oder innerhalb desselben liegt. Der Kreis ist desshalb eine Curve zweiter Klasse.

Von einem Punkte aus lassen sich an einen Kegelschnitt zwei, eine oder keine Tangente legen, je nachdem er ausserhalb des Kegelschnittes, auf demselben oder innerhalb desselbn liegt. Der Kegelschnitt ist desshalb eine Curve zweiter Klasse.

Zieht man aus einem Punkte p in der Ebene eines Kreises Gerade, von denen irgend eine den Kreis in p_1 und p_2 treffen möge, und bestimmt jedesmal zu p, p_1 und p_2 den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p', so ist der Ort dieses Punktes p' eine Gerade P, welche die Polare des Punktes p in Bezug auf den Kreis heisst. Umgekehrt wird p der Pol der Geraden P genannt.

Zieht man aus einem Punkte p in der Ebene eines Kegelschnittes Gerade, von denen irgend eine den Kegelschnitt in p_1 und p_2 treffen möge, und bestimmt jedesmal zu p, p_1 und p_2 den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p', so ist der Ort dieses Punktes p' eine Gerade P, welche die Polare des Punktes p in Bezug auf den Kegelschnitt heisst. Umgekehrt wird p der Pol der Geraden P genannt.

In Bezug auf einen Kreis gehört zu jedem Punkte der Ebene stets eine, aber auch nur eine Polare und zu jeder Geraden stets ein, aber auch nur ein Pol. Liegt der Pol p ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare

In Bezug auf einen Kegelschnitt gehört zu jedem Punkte der Ebene stets eine, aber auch nur eine Polare und zu jeder Geraden stets ein, aber auch nur ein Pol. Liegt der Pol p ausserhalb des Kegelschnittes, so

P den Kreis in zwei Punkten und ist zugleich die Berührungssehne der von *p* aus an den Kreis gelegten Tangenten. Befindet sich *p* auf dem Kreise selbst, so ist die zugehörige Polare die Tangente in *p*. Wenn schliesslich der Pol im Innern des Kreises liegt, so schneidet die Polare den Kreis nicht.

schneidet die Polare *P* den Kegelschnitt in zwei Punkten und ist zugleich die Berührungssehne der von *p* aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten. Befindet sich *p* auf dem Kegelschnitte selbst, so ist die zugehörige Polare die Tangente in *p*. Wenn schliesslich der Pol im Innern des Kegelschnittes liegt, so schneidet die Polare den Kegelschnitt nicht.

Die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, der gezeichnet vorliegt, kann mittelst des Lineals allein construirt werden; auch ergibt diese Construction zugleich die möglichen Tangenten, die von dem Punkte aus an den Kreis gehen, linear.

Bewegt sich ein Punkt *p* auf einer Geraden *G*, so dreht sich seine Polare in Bezug auf einen festen Kreis um einen Punkt, welcher der Pol von *G* ist. Umgekehrt, dreht sich eine Gerade *G* um einen festen Punkt *p*, so durchläuft der Pol von *G* in Bezug auf einen gegebenen Kreis eine Gerade, welche die Polare von *P* ist.

Die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt, der gezeichnet vorliegt, kann mittelst des Lineals allein construirt werden; auch ergibt diese Construction zugleich die möglichen Tangenten, die von dem Punkte aus an den Kegelschnitt gehen, linear.

Bewegt sich ein Punkt *p* auf einer Geraden *G*, so dreht sich seine Polare in Bezug auf einen festen Kegelschnitt um einen Punkt, welcher der Pol von *G* ist. Umgekehrt, dreht sich eine Gerade *G* um einen festen Punkt *p*, so durchläuft der Pol von *G* in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt eine Gerade, welche die Polare von *P* ist.

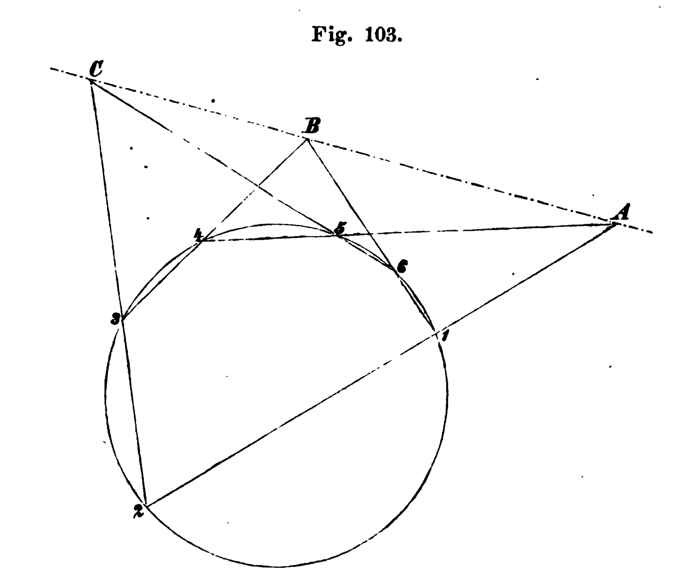
§ 26. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

Die Sätze von Pascal und Brianchon, welche in § 4 und § 6 für den Kreis und in § 23 für jeden Kegelschnitt abgeleitet worden sind, lassen sich zufolge der Betrachtungen in § 25 sofort vom Kreise auf den Kegelschnitt übertragen. Sie beweisen, dass einerseits durch fünf seiner Punkte und andererseits durch

fünf seiner Tangenten ein Kegelschnitt bestimmt ist, auch dienen sie als Mittel, um in dem einen oder andern Falle beliebig viele andere Punkte und Tangenten des Kegelschnittes mittelst des Lineals allein zu construiren*).

Sind z. B. die fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 fest, während der sechste 6 sich in dem Kegelschnitte *K* bewegt, so bleibt von den

Fig. 103.



drei Durchschnittspunkten gegenüberliegender Seiten des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 blos *A* fest und *B*, *C* bewegen sich, jedoch vermöge des Pascal'schen Satzes so, dass die durch sie bestimmte Gerade *G* stets durch *A* geht, also sich um diesen Punkt *A* dreht. Wenn daher umgekehrt durch *A* irgend eine Transversale *G* gezogen wird, so muss dieselbe die zwei festen Geraden 2 3, 3 4 stets in zwei solchen Punkten *C*, *B* schneiden, welche, wenn sie beziehlich mit den festen Punkten 5, 1 durch Gerade *C*5, *B*1 verbunden werden, irgend einen neuen sechsten Punkt 6 des Kegelschnittes *K* bestimmen. Wenn also *G* um *A* gedreht wird, so müssen *C* und *B* sich so bewegen, oder die Geraden *C*5, *B*1

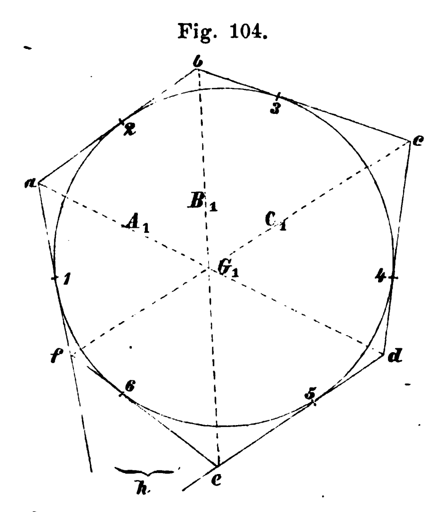
*) In den Figuren 103, 104 und 105 ist der Bequemlichkeit wegen statt eines allgemeinen Kegelschnitts ein Kreis gezeichnet worden.

sich um die festen Punkte 5, 1 so drehen, dass der Punkt 6 den ganzen Kegelschnitt durchläuft und beschreibt, demnach ist durch die fünf festen Punkte 1 2 3 4 5 nur ein einziger Kegelschnitt möglich.

Fällt 6 in seiner Bewegung endlich mit dem festen 1 zusammen, so wird B 1 Tangente in 1. Daraus lernt man, in den fünf festen Punkten 1 2 3 4 5 Tangenten an K zu legen, wenn K nicht gezeichnet vorliegt, sondern nur jene fünf Punkte gegeben sind. Durch den Durchschnitt C der festen, gegebenen Geraden 2 3, 1 5 und durch A ziehe man G, so muss diese Gerade der festen 3 4 in demjenigen Punkte B begegnen, durch welche die Tangente in 1 geht, wodurch diese gefunden ist; ebenso die übrigen. Diese Construction gründet sich also auf folgenden besondern Satz [wobei nämlich eine Seite des eingeschriebenen Sechsecks unendlich klein, d. h. eine Tangente wird]: Bei jedem irgend einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfeck fallen die Durchschnitte A, C zweier Paar Gegenseiten mit dem Durchschnitte B der fünften Seite und der Tangente in der ihr gegenüberliegenden Ecke in irgend eine und dieselbe Gerade.

Sind andererseits fünf Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegelschnittes K_1 fest, so sind in Rücksicht des Sechsecks, welches sie

Fig. 104.



mit irgend einer sechsten 6 bilden, auch die vier Ecken a, b, c, d fest, so wie die Hauptdiagonale A_1, und es muss daher, wenn

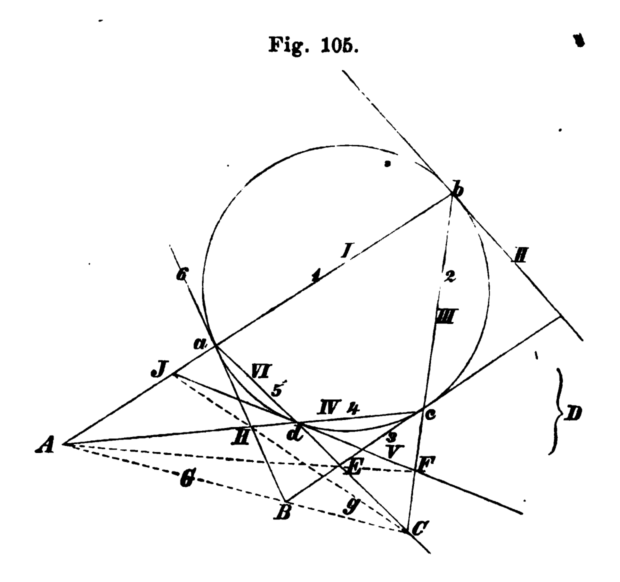
die Tangente 6 ihre Lage ändert, der Durchschnitt G_1 der zwei übrigen Hauptdiagonalen B_1, C_1 jene feste Gerade A_1 durchlaufen, so dass umgekehrt jedem Punkte G_1 in A_1 eine bestimmte Tangente 6 entspricht, und zwar so, dass durch fünf Tangenten alle übrigen oder der Kegelschnitt K_1 bestimmt ist. Fällt die Tangente 6 endlich auf 1, so fällt e mit h und f mit dem Berührungspunkte 1 zusammen, und auch umgekehrt; für diesen Fall ist also $B_1 = bh$ bestimmt, mit ihm auch G_1, und durch diesen C_1, welche Gerade sofort 1 ergibt, d. h. wenn fünf seiner Tangenten gegeben sind, so ist der Kegelschnitt K_1 bestimmt und es sind die Berührungspunkte jener Tangenten leicht zu finden vermittelst des Satzes: Bei jedem irgend einem Kegelschnitt umgeschriebenen Fünfecke treffen zwei Diagonalen ad, bh nebst derjenigen Geraden $c1$, welche die fünfte Ecke mit dem Berührungspunkte 1 ihrer Gegenseite verbindet, einander stets in einem und demselben Punkte G_1.

Aus den beiden Sätzen über das ein- und umgeschriebene Sechseck lassen sich weiter Folgerungen für das Viereck und das Dreieck ziehen, welche respective einem gegebenen Kegelschnitte eingeschrieben oder umgeschrieben sind.

Werden nämlich bei einem eingeschriebenen Sechseck zwei Seiten gleichsam aus dem Kegelschnitte ausgegestossen, so dass sie in Tangenten übergehen, so muss dennoch die Eigenschaft des Pascal'schen Satzes bestehen bleiben, so dass die vier Seiten jedes eingeschriebenen Vierecks nebst zwei Tangenten in irgend zwei Ecken desselben als sechs Seiten eines eingeschriebenen Sechsecks anzusehen sind, für welches der genannte Satz gelten muss. Hält man die vier Seiten des Vierecks $abcd$ fest, so sind dabei noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die Tangenten an den gegenüberstehen Ecken [a und c oder b und d] sich befinden, oder aber an aufeinanderfolgenden Ecken [wie a und d, d und c, c und b, b und a]. Nach diesen Fällen hat man nur die Nummern der sechs Seiten des Sechsecks zu verändern, um den Satz für jeden Fall insbesondere anwenden zu können. Für die Seiten 1 2 3 4 5 6 folgt z. B., dass die drei Punkte ABC in einer Geraden G liegen, d. h. in Bezug auf das Viereck, dass die Durchschnitte A, C der Gegenseiten eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks $abcd$ und der Durchschnitt B der Tangenten in zwei Gegenecken desselben stets in

einer Geraden G liegen. Für die Ordnung I, II, III, IV, V, VI folgt aber auch, dass die nämlichen Punkte A, C mit dem Durchschnitte D der Tangenten in b, d auf derselben Geraden liegen,

Fig. 105.



welche folglich mit G zusammenfällt. Für den andern Fall, wo die Seiten des Sechsecks in der Ordnung 1 2 3 4 V VI genommen werden, folgt, dass A, F, E in einer Geraden liegen; ebenso befinden sich auch J, H, C in einer Geraden. Man findet in dieser Weise für das vollständige Viereck $abcd$ [die Definition des vollständigen Vierecks schliesst sich durchaus der in § 5 gegebenen für das vollständige Vierseit an] und das zugehörige umgeschriebene Vierseit drei Gerade G und zwölf Gerade g [im Sinne von CHJ]. Andererseits, wenn man von der Betrachtung des vollständigen Vierseits ausgeht, erhält man drei Punkte G_1 und zwölf Punkte g_1.

Es zeigt sich aus diesen Entwicklungen unmittelbar, dass ein Kegelschnitt durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben, oder durch vier Tangenten und den Berührungspunkt der einen bestimmt ist, und wie sofort die drei andern Tangenten, oder die drei andern Berührungspunkte, sowie ferner beliebige andere Punkte oder Tangenten des Kegelschnitts blos durch Ziehen gerader Linien zu finden sind.

Gehen bei dem Sechsecke, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, drei Seiten in Tangenten über, und zwar die erste, dritte und fünfte, oder die zweite, vierte und sechste, so ergibt sich: Dass bei jedem irgend einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke die drei Punkte A, B, C, in welchen die Seiten mit den Tangenten in den Gegenecken sich schneiden, allemal in irgend einer Geraden G liegen. Ebenso: Dass bei jedem umgeschriebenen Dreiecke die drei Punkte, in welchen die drei Seiten von den Berührungssehnen geschnitten werden, in einer Geraden liegen. Oder: Dass bei jedem Kegelschnitte die Seiten irgend zweier zusammengehöriger Dreiecke [ein- und umgeschriebenen] sich in drei solchen Punkten schneiden, welche in derselben Geraden sich befinden. Andererseits folgt, dass bei jedem, irgend einem Kegelschnitte umgeschriebenen Dreieck die drei Geraden $A_1 B_1 C_1$, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, einander in einem Punkte G_1 treffen. Ebenso ergibt sich noch, dass der Kegelschnitt einerseits durch drei Punkte und zwei der Tangenten in denselben, und andrerseits durch drei Tangenten und die Berührungspunkte zweier derselben bestimmt ist, so dass sich daraus beliebig viele andere Punkte und Tangenten leicht mittelst des Lineals allein finden lassen. Als spezieller Fall des eben abgeleiteten Satzes findet man: Der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente halbirt das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben. Man braucht zum Beweise nur zu beachten, dass die Asymptoten der Hyperbel Tangenten sind, deren Berührungpunkte im Unendlichen liegen.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich, dass, wenn man von einem Kegelschnitt fünf Elemente, d. h. entweder fünf Punkte oder fünf Tangenten kennt, derselbe im Allgemeinen vollkommen bestimmt ist. Die Sätze von Pascal und Brianchon weisen aber auch auf den Schluss hin, dass umgekehrt durch jede beliebige fünf Punkte oder fünf Tangenten ein Kegelschnitt bestimmt ist. Eine Bestätigung findet diese Bemerkung darin, dass nach § 19 irgend vier Gerade in der Ebene als Tangenten einer Parabel gewählt werden können, denn neben diesen vier Geraden ist auch die unendlich entfernte Gerade der Ebene eine Tangente dieser Parabel, so dass dieselbe in Wirklichkeit durch fünf Tangenten gegeben ist. Man kann also sagen: Ein Kegel-

schnitt ist durch fünf seiner Punkte oder fünf seiner Tangenten vollkommen bestimmt; umgekehrt lässt sich durch jede fünf Punkte ein, aber nur ein Kegelschnitt legen, und ebenso existirt stets ein, aber nur ein Kegelschnitt, der fünf gegebene Gerade berührt. Zwei Kegelschnitte können aus diesem Grunde nie mehr als vier Punkte oder vier Tangenten gemein haben. Hierbei ist die noch nicht hervorgehobene Voraussetzung gemacht, dass weder drei der Punkte des untersuchten Kegelschnitts in einer Geraden liegen, noch drei seiner Tangenten durch einen und denselben Punkt gehen; diese speziellen Fälle erledigen sich aber sofort, indem dann Kegelschnitte auftreten, die entweder aus den sämmtlichen Punkten zweier Geraden bestehen, oder aber, deren Tangenten die sämmtlichen Geraden sind, welche durch den einen oder den andern von zwei festen Punkten gelegt werden können.

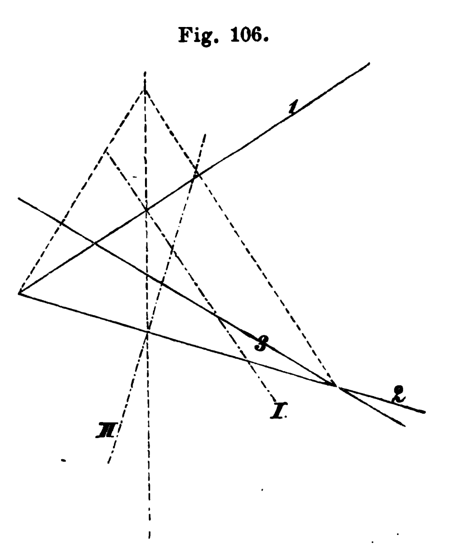
Von grossem Belange ist noch eine Folgerung, welche wir aus dem Pascal'schen und dem Brianchon'schen Satze in ihrer allgemeinen Fassung ziehen wollen. Es ist nämlich bis jetzt nur gezeigt worden, dass jeder Kegelschnitt als Projection des Kreises aufgefasst werden kann; aber es gilt auch der umgekehrte Satz, dass jede beliebige Projection des Kreises ein Kegelschnitt ist, also nicht nur diejenigen, welche durch den geraden Kegel vermittelt werden. In der That, wenn wir einen Kreis, der in der Ebene E liegt, vermittelst geradliniger Strahlen, die durch einen festen Punkt D ausserhalb der Ebene E gehen, auf eine andere Ebene E_1 projicirt, welche nicht durch D geht und nicht zu E parallel ist, so erhält man in E_1 eine Figur, für welche sowohl der Satz von Pascal als derjenige von Brianchon gilt, d. h. jede beliebige Projection eines Kreises ist ein Kreisschnitt.

Zum Schlusse geben wir noch zwei Anwendungen der Sätze von Pascal und Brianchon.

Die erste besteht in dem Beweise des bereits hergeleiteten Satzes [§ 19]: dass der Höhenpunkt eines der Parabel umschriebenen Dreiecks in der Leitlinie derselben liegt, welcher Beweis mit Hülfe eines Brianchon'schen Sechsecks geführt wird. [Wir nennen Brianchon'sches Sechseck jedes Sechseck, in welchem sich die drei Hauptdiagonalen in demselben Punkte schneiden. Ebenso heisst jedes Sechseck, in welchem die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden liegen, ein Pascal'sches Sechseck. Jedes solche Sechseck hat die Eigenschaft, dass

seine Ecken auf einem Kegelschnitte liegen, während die Seiten eines Brianchon'schen Sechsecks Tangenten eines Kegelschnittes sind.] Zunächst erinnern wir an den Satz, dass der Durchschnitt zweier zu einander rechtwinkliger Tangenten der Parabel auf die Leitlinie fällt. Seien nun 1 und *I*, 2 und *II* zwei Paare zu einander senkrecht stehender Parabeltangenten, ferner 3 und die unendlich entfernte Gerade G_∞ der Ebene zwei weitere Tangenten

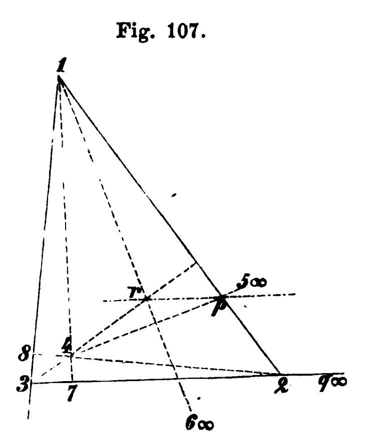
Fig. 106.



der Parabel, so bilden 1 *I* 2 *II* 3 G_∞ ein Brianchon'sches Sechseck, in welchem die Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden müssen. Wir wählen die Reihenfolge der Seiten des Sechsecks in der Art, dass (1 3) und (*II* G_∞), (2 3) und (*I* G_∞), (1 *I*) und (2 *II*) zu Gegenecken werden. Die erste Hauptdiagonale ist unter dieser Voraussetzung, da (*II* G_∞) der unendlich entfernte Punkt von *II*, also die von (1 3) nach (*II* G_∞) gezogene Gerade parallel zu *II* ist, weiter nichts als das Perpendikel, das von dem Punkte (1 3) auf 2 gefällt werden kann, also die zu 2 gehörige Höhe des Dreiecks (1 2 3). Ebenso fällt die zweite Hauptdiagonale des Sechsecks mit der zu 1 gehörigen Höhe desselben Dreiecks zusammen. Durch den Schnittpunkt dieser Hauptdiagonalen, resp. durch den Höhenpunkt des Dreiecks (1 2 3) muss auch die dritte Hauptdiagonale gehen, welche aber weiter nichts ist, als die Leitlinie der Parabel. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Mit Hülfe des Pascal'schen Satzes lässt sich nachweisen, dass der Höhenpunkt eines der gleichseitigen Hyperbel einegeschriebenen Dreiecks ebenfalls auf dieser Hyperbel liegt. Seien 1 2 3 die gegebenen Punkte auf der gleichseitigen Hyperbel, 4 der Höhenpunkt des von ihnen gebildeten Dreiecks und 5 und 6 die unendlich entfernten Punkte der Hyperbel, so dass also die Richtungen von Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte der Ebene aus nach 5 und 6 gehen, zu einander senkrecht stehen. Es ist, um den Beweis unseres Satzes zu führen, einzig zu zeigen, dass das Sechseck 1 2 3 4 5 6 ein Pascal'sches Sechseck ist, d. h., dass die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten auf einer Geraden liegen. Nun schneiden sich (1 2) und (4 5) in p, (2 3) und (5 6) in dem unendlich entfernten Punkte q der Geraden (2 3) und schliesslich (3 4) und (6 1) in r; wenn also p, q, r in derselben Geraden liegen sollen, so müssen (pr) und (2 3) parallel sein. Im Dreiecke (1 4 p) steht (1 6) [oder (1 2)] senkrecht auf (4 5) [oder (4 p)], weil die Richtungen der unendlich entfernten Punkte 5 und 6 senkrecht zu einander stehen, ebenso steht (3 4) [oder (4 r)] senkrecht auf (1 2) [oder (1 p)], demnach schneiden sich (1 r) und (4 r) im Höhenpunkt des genannten Dreiecks (1 4 p) und pr ist die dritte Höhe desselben. Es stehen also (pr) und (2 3) beide auf (1 4) senkrecht und sind demzufolge parallel. Der hiermit bewiesene Satz lässt sich auch in folgende Fassung bringen: Jede gleichseitige Hyperbel, welche einem gegebenen Dreieck eingeschrieben ist, geht auch durch den Höhenpunkt desselben.

Fig. 107.



Ein zweiter Beweis beruht auf folgendem Gedankengange: Zieht man von einem Punkte M aus Strahlen nach den drei Ecken eines Dreiecks, und errichtet in M Perpendikel auf diese Strahlen, so liegen die Schnittpunkte derselben mit den Gegenseiten des Dreiecks in einer Geraden; diess ergibt sich einfach durch Polarisation des Satzes, „dass die drei Höhen eines Dreiecks sich

in einem Punkte schneiden," in Bezug auf einen beliebigen Kreis mit dem Mittelpunkte *M*. Man kann nun weiter zeigen: Wenn die von *M* aus nach einem der dem Dreiecke eingeschriebenen Kreise gezogenen Tangenten senkrecht zu einander stehen, so berührt die erwähnte Gerade diesen Kreis. Wird dieser letztere auf einen um *M* geschlagenen Kreis polarisirt, so ergibt sich der vorhin bewiesene Satz.

Aus demselben wollen wir einige Folgerungen ziehen: Es sei wieder 4 der Höhenpunkt des einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks 1 2 3, ferner 7 der Durchschnitt von (1 4) und (2 3) und 8 der Durchschnitt von (2 4) und (1 3), so sind die Dreiecke 2 4 7, 1 4 8, 1 3 7 ähnlich, und demzufolge $\frac{(27)}{(47)} = \frac{(17)}{(37)}$ oder $(27) . (37) = (17) . (47)$. Es sind aber (2 3) und (1 4) zwei Sehnen der Hyperbel, die sich rechtwinklig schneiden; wir haben also den Satz: Die Rechtecke unter den Abschnitten zweier einander rechtwinklig durchschneidender Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel sind einander gleich. — Halten wir im Dreieck 1 2 3 die Seite 1 2 fest, verrücken aber den Punkt 3 auf der Hyperbel, so dass der Winkel bei 1 ein rechter wird, so fällt der Höhenpunkt 4 in den Scheitel 1 hinein und 17 wird zur Tangente im Punkte 1, d. h.: In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieck ist das Perpendikel vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Tangente der Hyperbel. Dieser Satz kann auch wie folgt ausgesprochen werden: Wenn der Scheitel eines rechten Winkels auf einer gleichseitigen Hyperbel liegt, und man dreht den Winkel um seinen Scheitel, so bleibt die von seinen Schenkeln abgeschnittene Sehne stets senkrecht zur Tangente im Scheitel.

§ 27. Polareigenschaften der Kegelschnitte.

Zu jedem beliebigen Punkte der Ebene gehört in Bezug auf einen Kegelschnitt stets eine, aber auch nur eine Polare, und jeder Geraden entspricht ein, aber auch nur ein Pol. Irgend eine durch den Pol gelegte Transversale schneidet auf der Polaren irgend einen Punkt aus, welcher in bekannter Zuordnung der vierte harmonische Punkt ist zum Pole und den Schnittpunkten der Transversalen mit dem Kegelschnitte. Sucht man also den Pol der unendlich entfernten Geraden in Bezug auf einen vor-

gelegten Kegelschnitt, so muss die ausgesprochene Eigenschaft ihre Gültigkeit noch besitzen, und es muss demnach der Pol in der Mitte liegen zwischen den beiden Punkten, welche eine beliebig durch ihn gelegte Transversale auf dem Kegelschnitte ausschneidet. Es hat aber gar kein anderer Punkt, als der Mittelpunkt des Kegelschnitts die angegebene Eigenschaft, demzufolge ist der Pol der unendlich entfernten Geraden der Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes. Umgekehrt ist die Polare des Mittelpunkts eines Kegelschnittes in Bezug auf denselben die unendlich entfernte Gerade der Ebene. Wenn der Mittelpunkt des Kegelschnittes innerhalb desselben liegt, so sind von ihm aus keine Tangenten an den Kegelschnitt möglich, und derselbe hat keine unendlich entfernten Punkte, d. h. er ist Ellipse. Befindet sich der Mittelpunkt ausserhalb des Kegelschnittes, so ist derselbe Hyperbel, und er hat zwei unendlich entfernte Punkte, welche mit dem Mittelpunkte verbunden zwei Tangenten, die Asymptoten der Hyperbel, ergeben. Schliesslich kann der Mittelpunkt auf dem Kegelschnitte selbst liegen, d. h. die unendlich entfernte Gerade der Ebene ist eine seiner Tangenten und er selbst eine Parabel.

Durch diese Betrachtungen rechtfertigt sich aufs Neue die Bezeichnung „die unendlich entfernte Gerade der Ebene," denn alle unendlich entfernten Geraden der Ebene haben in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt nur einen einzigen Pol; wären nämlich deren zwei vorhanden, so hätte der Kegelschnitt zwei Mittelpunkte und die Verbindungsgerade derselben würde auf dem Kegelschnitte eine Strecke ausschneiden, welche in zwei verschiedenen Punkten gehälftet würde, was unmöglich ist. Da nun alle unendlich entfernten Geraden denselben Pol gemein haben, so müssen sie, da zu jedem Pol im Allgemeinen nur eine Polare gehört, als in eine und dieselbe Gerade zusammenfallend betrachtet werden.

Jede durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes gehende Gerade heisst Durchmesser und ihr Pol liegt in unendlicher Entfernung. Umgekehrt ist die Polare jedes unendlich entfernten Punktes ein Durchmesser.

Aus den Grundeigenschaften von Pol und Polare leitet man sofort den Satz ab: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich die Berührungssehne der beiden von ihm aus an

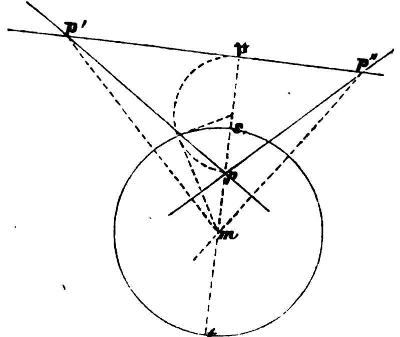
den Kegelschnitt gelegten Tangenten um einen festen Punkt, den Pol jener Geraden. Nun ist für Ellipse, Hyperbel und Parabel gezeigt worden, dass die Berührungssehne der beiden von irgend einem Punkte der Leitlinie aus an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten durch den zugehörigen Brennpunkt geht. Ein Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie eines Kegelschnittes sind also stets Pol und Polare in Bezug auf denselben.

Ein Dreieck, welches in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt die Eigenschaft hat, dass die Polare einer jeden seiner Ecken mit der Verbindungsgeraden der beiden übrigen zusammenfällt, heisst ein Tripel harmonischer Punkte des Kegelschnitts. Es gibt unendlich viele solche Tripel, denn man kann einen der drei Punkte willkürlich wählen, ebenso noch auf der Polaren desselben den zweiten, und dann ist erst der dritte Punkt des Tripels vollständig bestimmt. Der Durchschnittspunkt irgend zweier Seiten des Tripeldreiecks ist der Pol der dritten Seite; man kann also sagen: Die drei Seiten eines Tripeldreiecks bilden ein Tripel harmonischer Strahlen. Aus der Construction der Polaren eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt, die durchaus nach § 6 [Fig. 15] für jeden beliebigen Kegelschnitt ausgeführt werden kann, erkennt man die Richtigkeit des nachfolgenden Satzes: In einem vollständigen Viereck, dessen Ecken $\alpha\alpha'\beta\beta'$ auf einem Kegelschnitte liegen, bilden die drei Diagonalpunkte $pp'p''$ [Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten] ein Tripel harmonischer Punkte. Dieses Tripel ist aber allen Kegelschnitten gemein, welche durch die Ecken des vollständigen Vierecks gehen und ferner ist es das einzige Tripel, welches irgend zweien dieser Kegelschnitte gemein sein kann. In der That, sei α einer von den vier Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte, so bestimmt er mit dem Tripel $pp'p''$ das Viereck $\alpha\alpha'\beta\beta'$ vollständig, und zwar linear, während ein anderes Tripel $qq'q''$ offenbar ein anderes Viereck ergeben würde, was wider die Voraussetzung ist. Zwei Kegelschnitte, welche sich in vier Punkten schneiden, haben also immer ein, aber auch nur ein Tripel harmonischer Punkte gemein, welches durch die Schnittpunkte linear bestimmt ist. Man kann das auch so ausdrücken: Schneiden sich zwei Kegelschnitte in vier Punkten, so existiren stets drei, aber auch nur drei Punkte, für welche die beiden Polaren in Hinsicht der gegebenen Kegelschnitte zusammenfallen.

Ein Punkt p allein bestimmt, wie bereits bemerkt, das Tripel noch nicht; man kann auf der Polaren P desselben noch unendlich viele Punktenpaare $p'p''$ annehmen, welche das Tripel vervollständigen. Sind s und t die Durchschnitte von P mit dem Kegelschnitte, so sind p' und p'' ihnen harmonisch zugeordnet, und umgekehrt: jedes zu s und t harmonisch zugeordnete Punktenpaar ergibt mit p ein Tripel. Ebenso wird durch einen Strahl das Tripel noch nicht bestimmt; man kann nämlich von dem Pole dieses Strahles aus, insofern diess möglich ist, Tangenten an den Kegelschnitt legen, und jedes Paar von Strahlen, welches diesen Tangenten harmonisch zugeordnet ist, ergibt ein Tripel. Von einem Tripel harmonischer Punkte liegt stets einer innerhalb des Kegelschnittes, die beiden andern ausserhalb; von den drei Strahlen eines Tripels schneiden zwei den Kegelschnitt, der dritte aber trifft ihn nicht.

Da bei einem Kreise die Polare stets senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden von Pol und Mittelpunkt, so ist der Mittelpunkt zugleich der Höhenpunkt aller dem Kreise zugehörigen Tripel; es ist zudem klar, dass diese Tripel nur stumpfwinklige Dreiecke bilden können. Der Kreis ist durch eines seiner Tripel vollständig bestimmt; dasselbe bildet nach der eben gemachten Bemerkung ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Höhenpunkt m der Mittelpunkt des zu bestimmenden Kreises ist. Um den Radius

Fig. 108.



dieses Kreises zu finden, ziehe man die Gerade mp, wo p ein Tripelpunkt ist, und suche deren Durchschnitt $\mathfrak{p}$ mit $p'p''$. Es seien nun s und t die Durchschnitte des Kreises mit mp, so muss

$ms^2 = mt^2 = mp \, . \, m\mathfrak{p}$ sein, wodurch s und t bestimmt sind. Zur Construction lege man einen Halbkreis über $p\mathfrak{p}$, ziehe an diesen die Tangente von m aus, so ist die Länge derselben der Radius des gesuchten Kreises.

Wählt man den Mittelpunkt p eines gegebenen Kegelschnitts als den einen Punkt eines ihm zugehörigen Tripels, so liegen die beiden andern p' und p'' im Unendlichen; von den drei Strahlen des Tripels ist der eine $p'p''$ die unendlich entfernte Gerade der Ebene, die beiden andern pp' und pp'' sind Durchmesser des Kegelschnittes. Da p' der Pol von pp'' ist, so folgt, dass die beiden von p' aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers pp'' berühren; zudem sind sie offenbar diesem Durchmesser parallel. Es gilt Aehnliches von p'' in Bezug auf pp', so dass man den Satz hat: Wenn von einem Tripel harmonischer Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt der eine Strahl die unendlich entfernte Gerade ist, so sind die beiden andern zwei solche Durchmesser, von denen jeder den Tangenten in den Endpunkten des andern parallel ist [insofern diese Tangenten wirklich vorhanden sind]. Bei der Ellipse sind also diese Durchmesser conjugirt, und dass dasselbe auch von der Hyperbel gilt, lässt sich leicht beweisen; also: Irgend zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts bilden mit der unendlich entfernten Geraden ein Tripel harmonischer Strahlen. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so bilden die unendlich entfernten Punkte der Asymptoten mit den unendlich entfernten Punkten irgend eines Paares conjugirter Durchmesser ein System von harmonischen Punkten, woraus folgt, dass irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der Hyperbel zugeordnet harmonisch zu den Asymptoten liegen, namentlich gilt diess auch von den Axen, welche die Asymptotenwinkel halbiren.

Unter den Kreisen, welche mit einem gegebenen Kegelschnitte conzentrisch sind, gibt es stets solche, welche denselben in vier Punkten schneiden. Irgend einer dieser Kreise hat mit dem Kegelschnitt ein, aber auch nur ein Tripel harmonischer Strahlen gemein, von denen der eine die unendlich entfernte Gerade der Ebene ist, weil die Pole dieser Geraden nach Kreis und Kegelschnitt in den gemeinsamen Mittelpunkt fallen; das gemeinsame Tripel besteht also ausserdem noch aus einem Paare von Strahlen, welche zugleich conjugirte Durchmesser für den Kreis und

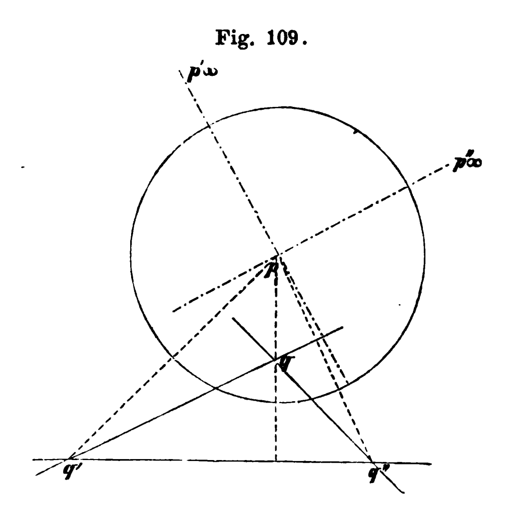
für den Kegelschnitt sind. Nun bilden alle Paar conjugirter Durchmesser des Kreises rechte Winkel, und umgekehrt, irgend ein Paar senkrechte Durchmesser des Kreises sind conjugirt. Es gibt also in einem Kegelschnitte, der einen Mittelpunkt hat und kein Kreis ist, stets ein, aber auch nur ein Paar zu einander senkrechter, conjugirter Durchmesser.

Man kann nicht beliebige sechs Punkte in der Ebene wählen und festsetzen, sie sollen in bestimmter Ordnung genommen zwei Tripel $pp'p''$ und $qq'q''$ eines und desselben Kegelschnittes sein, sondern damit diess möglich ist, müssen die sechs Punkte auf einem und demselben Kegelschnitte liegen, dann aber ist die Bestimmung eine vollkommene, d. h. es gibt stets einen, aber auch nur einen Kegelschnitt, für welchen die genannten Punkte zwei Tripel bilden. Zum Beweise bedürfen wir des Satzes, dass ein Kegelschnitt K und eine Gerade G in seiner Ebene, welche ihn nicht trifft, stets so projicirt werden können, dass der Kegelschnitt zum Kreise, die Gerade aber zur unendlich entfernten Geraden in der Ebene dieses Kreises wird. Zunächst führen wir eine Projection so aus, dass die Gerade G ins Unendliche gerückt wird; diess geschieht, indem man einen beliebigen Punkt O im Raume wählt, von ihm aus K und G auf eine Ebene projicirt, welche zur Ebene durch O und G parallel ist. Da K und G nach Voraussetzung keinen Punkt gemein haben, so wird K eine Ellipse geworden sein, welche durch Parallelprojection [wodurch die unendlich entfernte Gerade wieder unendlich entfernte Gerade wird] leicht in einen Kreis zu verwandeln ist. So wie ein Kegelschnitt durch Projection immer wieder zu einem Kegelschnitt wird, so verwandelt sich auch ein Tripel stets wieder in ein Tripel der Projection.

Sei nun K der vorgelegte Kegelschnitt mit den beiden Tripeln $pp'p''$ und $qq'q''$, sei ferner $G = p'p''$ diejenige Gerade des ersten Tripels, welche K nicht schneidet, so können wir K und G so transformiren, das sie zu einem Kreise und der unendlich entfernten Geraden in dessen Ebene werden. In der transformirten Figur sind $pp'p''$ ein Tripel in Bezug auf den Kreis, und zwar ist p der Mittelpunkt dieses Kreises; soll also ein Kegelschnitt durch die Tripelpunkte, oder auch nur durch p' und p'' gehen, so muss er eine gleichseitige Hyperbel sein. Durch $p'p''$ $qq'q''$ ist eine gleichseitige Hyperbel bestimmt, welche nach einem

im vorigen § bewiesenen Satze durch den Höhenpunkt des von $qq'q''$ gebildeten Dreiecks geht, und dieser Höhenpunkt ist, weil $qq'q''$ ein Tripel des Kreises bilden, der Punkt p. Die Punkte

Fig. 109.



$pp'p''qq'q''$ liegen in der transformirten Figur auf einem und demselben Kegelschnitte, also befanden sie sich bereits in der ursprünglichen Lage auf einem Kegelschnitte. Dass nun umgekehrt sechs beliebige Punkte auf einem Kegelschnitt stets zwei Tripel harmonischer Punkte eines neuen Kegelschnittes sind, wird bewiesen, indem man den Kegelschnitt der sechs Punkte so in eine gleichseitige Hyperbel projicirt, dass zwei von ihnen ins Unendliche rücken, und dann den eben gegebenen Beweis rückwärts verfolgt.

Es ist bemerkenswerth, dass auch die Strahlen zweier Tripel eines Kegelschnittes Tangenten eines neuen Kegelschnittes sind. Wir gehen zum Beweis auf die einfache Figur zurück, in welche wir vorhin den Kegelschnitt und die beiden Tripel projicirten. Wir hatten einen Kreis mit dem Mittelpunkte p, dann auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene zwei Punkte p' und p'', welche von p aus unter rechtem Winkel gesehen werden und schliesslich ein Tripel $qq'q''$. Jetzt ist zu zeigen, dass $p'p''$, $p''p$, pp', $q'q''$, $q''q$, qq' Tangenten eines und desselben Kegelschnittes sind. Dieser Kegelschnitt ist durch $p'p''$, pp', $q'q''$, $q''q$, qq' bestimmt, und zwar ist er eine Parabel, weil $p'p''$ die unendlich

entfernte Gerade der Ebene ist. Dass nun auch $p''p$ die Parabel berührt, folgt daraus, dass p als Höhenpunkt des von den Parabeltangenten $q'q''$, $q''q$, qq' gebildeten Dreiecks in der Leitlinie derselben liegt; errichtet man aber in einem Punkte der Leitlinie ein Perpendikel auf eine Parabeltangente, so berührt dieses Perpendikel die Parabel ebenfalls, denn die Leitlinie ist der Ort der Durchschnittspunkte rechtwinkliger Tangenten, es ist also $p''p$ eine Tangente der eben bestimmten Parabel. Dass allgemein zwei beliebige Tripel harmonischer Strahlen eines Kegelschnittes Tangenten eines neuen Kegelschnittes sind, und dass umgekehrt irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes in bestimmter Gruppirung zu zweimal dreien als zwei Tripel eines andern Kegelschnittes aufgefasst werden können, soll nicht weiter ausgeführt werden.

Da durchaus analog wie beim Kreise Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt sich eindeutig entsprechen, so folgt, dass die Sätze, welche wie für die Polarisation in Hinsicht eines Kreises auch für die Polarisation in Hinsicht eines Kegelschnittes ihre Gültigkeit beibehalten, insofern nur von metrischen Eigenschaften, wie von Strecken, Winkeln, Axen, Brennpunkten u. s. w. abgesehen wird. Es folgt daraus sofort, dass die Polarfigur eines beliebigen Kegelschnittes in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt wieder ein Kegelschnitt ist, und zwar gleichgültig, ob man die zu polarisirende von diesen drei Curven auffasse als durch Punkte oder als durch Tangenten erzeugt. In der That, wenn für die ursprüngliche Figur der Satz von Pascal besteht, so gilt für die Polarfigur der Satz von Brianchon, und umgekehrt; übrigens bestimmt jeder von diesen beiden Sätzen für sich allein genommen eine Curve bereits als Kegelschnitt. Von den unendlich vielen Sätzen, die sich paarweise durch die Polarisation entsprechen, heben wir nur die nachfolgenden, im Verlaufe unserer Betrachtungen bereits bewiesenen Sätze hervor:

Ein vollständiges Vierseit wird gebildet durch vier beliebig in der Ebene gegebene Gerade, von denen keine drei durch denselben Punkt laufen, und von denen keine zwei parallel sind. Dasselbe zählt vier Seiten, sechs

Ein vollständiges Viereck wird gebildet durch vier beliebig in der Ebene gegebene Punkte, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen, und von denen keiner in unendlicher Entfernung sich befindet. Dasselbe

Ecken [Durchschnittspunkte der Seiten] und drei Diagonalen [Verbindungsgerade gegenüberliegender Ecken]. Auf jeder Diagonale befinden sich vier harmonische Punkte, von denen einerseits die Ecken des Vierseits, anderseits die Durchschnittspunkte der angenommenen Diagonale mit den beiden andern zugeordnet sind.

zählt vier Ecken, sechs Seiten [Verbindungsgeraden der Ecken] und drei Diagonalpunkte [Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten]. Durch jeden Diagonalpunkt gehen vier harmonische Strahlen, von denen einerseits die Seiten des Vierecks, anderseits die Verbindungsgeraden des angenommenen Diagonalpunktes mit den beiden andern zugeordnet sind.

Bei einem Dreiecke, das einem beliebigen Kegelschnitte eingeschrieben ist, treffen die Tangenten in den Ecken die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Bei einem Dreiecke, das einem beliebigen Kegelschnitte umschrieben ist, schneiden sich die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten in einem Punkte.

Drei Punkte, von denen jeder in Bezug auf einen Kegelschnitt der Pol der Verbindungsgeraden der beiden übrigen ist, heissen ein Tripel harmonischer Punkte desselben. Zwei Tripel harmonischer Punkte desselben Kegelschnittes sind Punkte eines neuen Kegelschnittes.

Drei Geraden, von denen jede in Bezug auf einen Kegelschnitt die Polare des Durchschnittspunktes der beiden übrigen ist, heissen ein Tripel harmonischer Strahlen desselben. Zwei Tripel harmonischer Strahlen desselben Kegelschnittes sind Tangenten eines neuen Kegelschnittes.

u. s. w.

Legt man den gemeinsamen Schnittpunkt S von vier in der Reihenfolge $abcd$ harmonischen Strahlen, von welchen also a und c, b und d zugeordnet sind, irgendwie auf die Peripherie eines Kreises, so schneiden die Strahlen aus demselben vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ aus, welche wir vier harmonische Punkte des Kreises nennen wollen. Vier solche Punkte haben die Eigenschaft, dass sie mit jedem beliebigen Punkte des Kreises vier harmonische Strahlen bestimmen, denn sei S' ein solcher Punkt, so sind die Winkel, welche $S'\mathfrak{a}$ und $S'\mathfrak{b}$ [die Strahlen unbegrenzt gedacht] mit einander bilden, resp. den Winkeln gleich, welche durch $S\mathfrak{a}$ und $S\mathfrak{b}$

erzeugt werden. Wenn aber vier Strahlen unter sich dieselben Winkel bilden, wie ihre entsprechenden in einem System harmonischer Strahlen, so sind sie ebenfalls harmonisch. Sind umgekehrt die Ecken eines Kreisvierecks in der Reihenfolge $\mathfrak{abcd}$ gegeben, so ist der Ort der Punkte, von welchen aus diese vier Punkte durch harmonische Strahlen in der Zuordnung *a* und *c*, *b* und *d* projicirt werden, der Kreis, welchem dieses Viereck eingeschrieben ist. Polarisirt man die vier harmonischen Punkte des Kreises in Bezug auf den Kreis selbst, so erhält man vier Tangenten desselben, welche von jeder beliebigen andern Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Solche Tangenten heissen harmonische Tangenten des Kreises, und man hat demnach den Satz: Die Tangenten in vier harmonischen Punkten eines Kreises sind vier harmonische Tangenten desselben, und umgekehrt, die vier Berührungspunkte von harmonischen Tangenten eines Kreises sind vier harmonische Punkte desselben.

Durch Projection gehen diese Sätze in die nachfolgenden, allgemeinern über:

Bestimmen vier Punkte $\mathfrak{abcd}$ eines Kegelschnitts mit irgend einem Punkte *S* desselben in bestimmter Zuordnung vier harmonische Strahlen, so erzeugt jeder andere Punkt des Kegelschnitts mit $\mathfrak{abcd}$ vier harmonische Strahlen in derselben Zuordnung.

Bestimmen vier Tangenten *abcd* eines Kegelschnitts mit irgend einer Tangente *T* desselben in bestimmter Zuordnung vier harmonische Punkte, so schneidet jede andere Tangente des Kegelschnittes *abcd* in vier harmonischen Punkten von derselben Zuordnung.

Die Tangenten in vier harmonischen Punkten sind vier harmonische Tangenten des Kegelschnittes, und werden von jeder beliebigen andern Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Die vier Berührungspunkte von harmonischen Tangenten sind harmonische Punkte des Kegelschnitts, und sie bestimmen mit jedem Punkte desselben vier harmonische Strahlen.

Die vier Scheitel von einem Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes sind vier harmonische Punkte desselben.

Die vier Tangenten in den Scheiteln eines Paares conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes sind vier harmonische Tangenten desselben.

Sollen vier beliebig gelegene Punkte $\mathfrak{abcd}$ mit einem Punkte S in bestimmter Zuordnung vier harmonische Strahlen erzeugen, so ist der Ort dieses Punktes S ein bestimmter Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte $\mathfrak{abcd}$ geht.

Sollen vier beliebig gelegene Gerade $abcd$ von einer Geraden T in bestimmter Zuordnung in vier harmonischen Punkten geschnitten werden, so umhüllt diese Gerade T einen bestimmten Kegelschnitt, welcher die vier Geraden $abcd$ berührt.

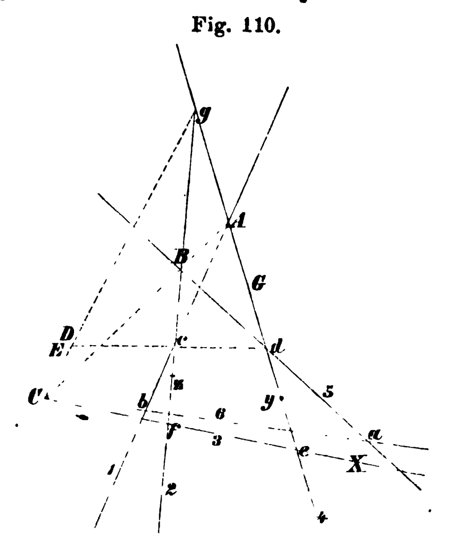
§ 28. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

Da durch irgend fünf Punkte oder fünf Tangenten im Allgemeinen stets ein Kegelschnitt bestimmt ist, so folgt, dass durch vier Punkte $abcd$ eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten geht, und dass eben so irgend vier Gerade $ABCD$ von einer unendlichen Anzahl von Kegelschnitten berührt werden. Zieht man durch einen der vier Punkte, z. B. durch d irgend eine Gerade G und nimmt in derselben einen bestimmten, übrigens beliebigen fünften Punkt e an, so ist durch die fünf Punkte $abcde$ ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt, und zwar kann er die Gerade G ausser in den zwei Punkten d, e in keinem andern Punkte treffen. Es ist demnach durch jeden Punkt in G ein eigenthümlicher Kegelschnitt bestimmt, und daher gibt es ebenso viele dem Viereck $abcd$ umschriebene Kegelschnitte $K(abcd)$, als in der Geraden G Punkte vorhanden sind. Analoges findet anderseits statt, wenn man in einer der vier Geraden $ABCD$, etwa in D, einen beliebigen Punkt g annimmt und durch denselben irgend eine fünfte Gerade E zieht. — Die Gesammtheit aller Kegelschnitte durch vier feste Punkte $K(abcd)$ heisst Kegelschnittbüschel und die Gesammtheit aller Kegelschnitte, welche vier Gerade berühren, $K(ABCD)$, heisst Kegelschnittschaar.

Zieht man durch zwei der vier gegebenen Grundpunkte des Büschels, etwa durch d, c, beliebige Gerade G, H, und verlangt in diesen zwei Punkte e, f, die demselben Kegelschnitt angehören, so sind sie wie folgt zu finden: Man fixire das Sechseck $cfedabc$ mit den Seiten 1 2 3 4 5 6, so bemerkt man, dass die fünf Seiten desselben, 1 2 4 5 6, fest sind, also auch die Durchschnittspunkte von 1 und 4, 2 und 5, welche A und B heissen, ebenso der Punkt C, in welchem 6 von AB geschnitten wird. Durch diesen Punkt geht aber auch 3, daher muss das Punk-

tenpaar ef, in welchem irgend ein Kegelschnitt des Büschels die Geraden GH schneidet, stets mit dem festen Punkte C in einer Geraden liegen und also werden alle jene Paare erhalten, wenn

Fig. 110.



eine Gerade X um C gedreht wird. Es entspringt daraus der Satz: Wird der Kegelschnittbüschel $K(abcd)$ durch irgend zwei Gerade G und H, wovon jeder durch einen der Grundpunkte d, c geht, geschnitten, so dreht sich die Verbindungsgerade X der zweiten Durchschnitte e und f von G und H mit K um einen festen Punkt C, welcher mit den übrigen beiden Grundpunkten a, b in einer Geraden liegt. Der polare Satz ist leicht herzustellen und lautet wie folgt: Werden auf zwei der Grundtangenten C und D der Kegelschnittschaar $K(ABCD)$ zwei Punkte s_1 und s_2 angenommen, von welchen aus die beiden noch möglichen Tangenten E und F an einen beliebigen Kegelschnitt der Schaar gezogen seien, so beschreibt deren Durchschnittspunkt bei Veränderung des Kegelschnitts eine Gerade, welche durch den gemeinsamen Punkt von A und B geht.

Werden in den Geraden G und H zu den zweimal drei Punkten g, d, e und g, c, f die vierten harmonischen, g zugeordneten Punkte y und z bestimmt, so lässt sich zeigen, dass die Gerade yz stets durch einen bestimmten festen Punkt p geht, während die Gerade ef sich um den Punkt C dreht. Denn zieht man Cg,

so wird der Punkt, in welchem sie von yz getroffen wird, zu den drei festen Punkten CDg harmonisch sein, und ef, yz müssen sich auf der festen Geraden dc, in P treffen; ist nun auch P veränderlich, so muss doch der Strahl Pzy stets durch einen festen Punkt p gehen, weil er mit Pg, PD, PC harmonisch ist. Es ist aber die Gerade yz offenbar die Polare des Punktes g in Beziehung des jedesmaligen Kegelschnittes $abcdef$; daraus folgt: Die Polaren irgend eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel treffen einander in einem und demselben Punkte; und polar ergibt sich: Die Pole irgend einer Geraden in Bezug auf eine Kegelschnittschaar liegen in einer und derselben Geraden.

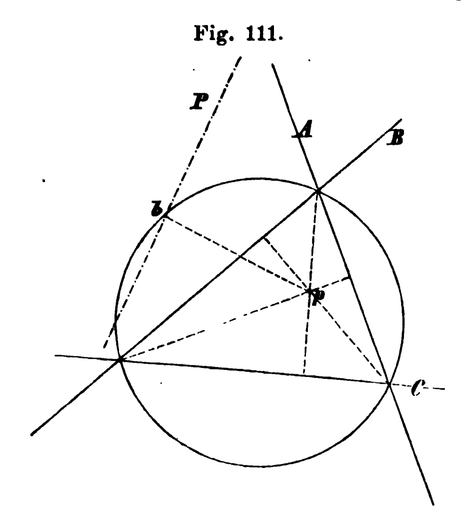
Der Pol der unendlich entfernten Geraden der Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt ist bekanntlich dessen Mittelpunkt, daher liegen die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schaar $K(ABCD)$ in einer Geraden. Die drei Diagonalen des Vierseits treten in der Schaar als Kegelschnitte mit unendlich kleiner Nebenaxe auf. [Ein solcher Kegelschnitt wird von jeder Geraden berührt, welche durch einen seiner Endpunkte geht.] Es folgt daraus, dass die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits in einer Geraden liegen.

Da die Polare des unendlich entfernten Punktes eines Durchmessers der zugeordnete [conjugirte] Durchmesser ist, so ergibt sich der Satz: Zieht man in einem Kegelschnittbüschel nach irgend einer Richtung die Durchmesser, so laufen deren conjugirte alle durch denselben Punkt. — Im Kegelschnittbüschel $K(abcd)$ befinden sich auch die drei Kegelschnitte, welche je aus einem Paare von Gegenseiten des vollständigen Vierecks $abcd$ bestehen. Da nun alle Polaren eines Kegelschnittes, der aus zwei Geraden besteht, durch den Schnittpunkt dieser Geraden gehen, so folgt: Zieht man aus einem beliebigen Punkte nach den Ecken des Diagonaldreiecks in einem vollständigen Viereck Strahlen, und sofort aus jedem dieser Diagonalpunkte den vierten, dem nach dem angenommenen Punkte gehenden zugeordneten Strahl, so treffen sich diese drei Strahlen in einem und demselben Punkte.

Für die Kegelschnitte, die demselben Viereck $abcd$ umgeschrieben, oder demselben Vierseit $ABCD$ eingeschrieben sind, lassen sich aus der Schaar Parabeln, welche demselben Dreieck eingeschrieben sind, mit Hülfe früherer Sätze folgende Eigenschaften ableiten:

Es sei das Dreieck ABC, sein Höhenpunkt p und der ihm umgeschriebene Kreis m gegeben. Jeder Punkt b des letztern ist der Brennpunkt einer dem Dreieck ABC eingeschriebenen

Fig. 111.



Parabel, deren Leitlinie durch p geht; der Strahl pb steht auf der Polare P des Punktes p in Bezug auf die Parabel senkrecht. Es ist desshalb der Ort von P ein Kegelschnitt, welcher p zum Brennpunkt hat. Projicirt man nun die Parabelschaar (ABC) von irgend einem Punkte D aus auf eine Ebene E_1, so geht sie in eine Kegelschnittschaar $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ über, deren vierte Grundtangente D_1 die Projection der unendlich entfernten Geraden in der Ebene der Parabeln ist, und in Bezug auf diese Kegelschnittschaar kann man den Punkt p als einen beliebigen ansehen. Man hat also allgemein den Satz: Die Polare eines Punktes in Bezug auf eine Kegelschnittschaar sind die Tangenten eines neuen Kegelschnittes; und durch Polarisation: Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel liegen in einem neuen Kegelschnitte.

Der zweite dieser beiden Sätze lässt sich auch wie folgt beweisen: Sind auf der gewählten Geraden G irgend vier harmonische Punkte α, β, γ, δ gegeben, so erzeugen diese mit dem Büschel die Punkte u, x, y, z, in welchen sich ihre sämmtlichen Polaren resp. schneiden. Die vier Polaren von $\alpha\beta\gamma\delta$ in Bezug auf einen der Kegelschnitte des Büschels sind aber vier, vom

Pole p der Geraden G oder $\alpha\beta\gamma\delta$ ausgehende harmonische Strahlen, die resp. durch u, x, y, z gehen, folglich liegen alle Pole p so, dass sie mit $uxyz$ vier harmonische Strahlen bestimmen, d. h. auf einem Kegelschnitt, der durch u, x, y, z geht. Es ist leicht nachzuweisen, dass dieser Kegelschnitt, wie auch die Gerade G liegen möge, stets die Diagonalpunkte des von den Grundpunkten des Büschels gebildeten vollständigen Vierecks enthält.

Wir bemerken einige spezielle Fälle der eben bewiesenen Sätze: Zieht man in einer Kegelschnittschaar nach irgend einer Richtung parallele Durchmesser, so sind die ihnen conjugirten Durchmesser die gesammten Tangenten eines Kegelschnitts, welcher die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits berührt, und ebenso die Gerade, welche die Mitten dieser Diagonalen verbindet. Umgekehrt, wird dem Vierseite, welches die letztgenannten Geraden bilden, irgend ein Kegelschnitt eingeschrieben, so ist jede Tangente desselben ein Durchmesser eines der Kegelschnitte der Schaar, und dann sind die diesen Durchmessern conjugirten Durchmesser unter sich parallel. — Da, wie leicht einzusehen ist, die Mitte einer Seite eines vollständigen Vierecks der Mittelpunkt eines bestimmten, dem Viereck umschriebenen Kegelschnittes ist, so folgt: Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen in einem neuen Kegelschnitte, welcher durch die drei Diagonalpunkte des von den Grundpunkten des Büschels gebildeten vollständigen Vierecks und durch die sechs Mitten der Seiten desselben geht. Liegen die vier Grundpunkte ($abcd$) des Büschels so, dass d der Höhenpunkt des von abc gebildeten Dreiecks ist, so besteht der Kegelschnittsbüschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, und der Ort ihrer Mittelpunkte ist der Kreis, welcher durch die Mitten der Seiten des Dreiecks abc, sowie durch die Fusspunkte der Höhen dieses Dreiecks geht.

Wenn die vier Grundpunkte $abcd$ eines Kegelschnittsbüschels ein convexes Viereck bilden, so dass keiner von ihnen in dem Dreieck liegt, welches die drei andern bestimmen, so ist der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels eine Hyperbel, und es befinden sich sonach im Büschel zwei Parabeln, deren Mittelpunkte die unendlich entfernten Punkte dieser Hyperbel sind. Sei jetzt p der unendlich entfernte Punkt in der Axe einer der beiden Parabeln, so besimmt er im Büschel ein System paralleler durch

ihn gehender Durchmesser, deren conjugirte Durchmesser, wie bewiesen worden ist, sich in einem Punkte p_1 schneiden müssen. Aber einer dieser conjugirten Durchmesser ist die unendlich entfernte Gerade [welche der Axe der angenommenen Parabel entspricht], folglich liegt p_1 ebenfalls im Unendlichen, d. h. die Kegelschnitte des Büschels haben ein System conjugirter Durchmesser, die unter sich parallel laufen und resp. mit den Axen der beiden im Büschel enthaltenen Parabeln gleichgerichtet sind.

Befindet sich im Büschel (*abcd*) ein Kreis, so müssen, weil sämmtliche Paare conjugirter Durchmesser des Kreises rechte Winkel einschliessen, die genannten Systeme conjugirter Durchmesser senkrecht zu einander stehen, d. h. die Axen der Kegelschnitte des Büschels sein. Also: Die Axen sämmtlicher Kegelschnitte, welche durch ein Kreisviereck gehen, sind unter sich resp. parallel, und namentlich auch parallel den Axen der beiden unter ihnen befindlichen Parabeln, so dass also diese Parabelaxen senkrecht zu einander stehen.

In dem Büschel treten auch die drei Kegelschnitte auf, die je in zwei Gerade zerfallen; die Axen eines solchen Kegelschnittes sind die Winkelhalbirenden der beiden Geraden, aus denen er besteht. Aus dieser Bemerkung lassen sich einige Sätze in Bezug auf die vier Punkte ableiten, in denen sich ein Kreis und ein Kegelschnitt treffen. Es müssen z. B. die Strahlen *ab* und *cd*, *ac* und *bd*, *ad* und *bc* mit jeder der Axen resp. gleiche Winkel bilden; hält man also den Kegelschnitt fest und verändert den Kreis derart, dass er stets durch *a* und *b* geht, so verändert die Sehne *cd* ihre Lage in der Weise, dass sie stets irgend einer ihrer Lagen parallel bleibt. Werden *a* und *b* als zusammenfallend angenommen, so berührt jeder Kreis durch *a* und *b* den Kegelschnitt in *a*. Unter allen diesen berührenden Kreisen gibt es einen, von welchem noch einer der Punkte *c* und *d* mit *a* und *b* zusammenfällt; dieser Kreis heisst der Krümmungskreis des Kegelschnittes in dem Punkte *a* und kann mit Hülfe der entwickelten Eigenschaften leicht construirt werden.









